АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ II
ВЫПУСК
4

1957
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1957

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ

Бернштейн С. Н., ***Гнеденко Б. В.***, ***Золотарев В. М.*** (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С.*** (зам. гл. редактора), ***Линник Ю. В.***, ***Сарымсаков Т. А.***, ***Смирнов Н. В.***, ***Хинчин А. Я.***

СОДЕРЖАНИЕ

Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова 389
Nagaev S. V. Some limit theorems for stationary Markov chains 416
Скороход А. В. О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам. 1. Процессы с независимыми приращениями 417
Scorohod A. V. On the differentiability of measures which correspond to stochastic processes 443
Золотарев В. М. Преобразования Меллина — Стильтьеса в теории вероятностей 444
Zolotarev V. M. Mellin-Stieltjes transformations in probability theory . . . 469

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Смирнов С. В., *Потапов М. К.* Номограмма для неполной Г-функции и функции вероятности χ^2 470
Smirnov S. V., *Potapov M. K.* A nomogram for an incomplete Γ-function and probability function χ^2. 472
Клепиков Н. П., *Соколов С. Н.* Нелинейный конфлюентный анализ 473
Klepikov N. P., *Sokolov S. N.* Non-linear confluence analysis 475
Прохоров Ю. В., *Фиш М.* Характеристическое свойство нормального распределения в Гильбертовом пространстве 475
Prohorov Yu. V., *Fisz M.* A characterization of normal distributions in Hilbert space 477
Резюме докладов, сделанных на заседаниях научно-исследовательского семинара по теории вероятностей. (Москва, февраль — май 1957 г.) . . . 478
A summary of papers presented at the sessions of the scientific research seminar on the theory of probabilities 478

Адрес редакции: Москва, В-234, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В 9-14-03

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4
1957

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

С. В. НАГАЕВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 389

Глава I

Некоторые свойства характеристических функций 391
§ 1. Строение линейного оператора, определяемого функцией вероятностей перехода 391
§ 2. Оператор $P(\theta)$ и его спектральное разложение 392
§ 3. Строение максимального по модулю собственного значения оператора $P(\theta)$ 394
§ 4. Оценка для $\lambda''(\theta)$ 396

Глава II

Предельные теоремы 401
§ 1. Общий вид предельных распределений 401
§ 2. Центральная предельная теорема 403
§ 3. Сходимость к устойчивым законам, отличным от нормального 406

Глава III

Локальная предельная теорема и асимптотические разложения . . . 409
§ 1. Локальная предельная теорема 409
§ 2. Асимптотические разложения 412

ВВЕДЕНИЕ

Пусть X — пространство точек ξ, F_X — σ-алгебра его подмножеств. Пусть $p(\xi, A)$, $\xi \in X$, $A \in F_X$ — функция вероятностей перехода. При фиксированном ξ, функция $p(\xi, A)$ является вероятностной мерой, а при фиксированном A измерима относительно F_X. Вероятности перехода за n шагов $p^{(n)}(\xi, A)$ вычисляются по формуле

$$p^n(\xi, A) = \int_A p^{(n-1)}(\eta, A)\, p(\xi, d\eta). \tag{0.1}$$

Если задано начальное распределение вероятностей $\pi(\cdot)$, то $p(\cdot, \cdot)$ определяет последовательность случайных величин

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

связанных в однородную цепь Маркова, причем

$$\Pr(x_1 \in A) = \pi(A),$$
$$\Pr(x_n \in A) = \int_X p^{(n-1)}(\xi, A)\,\pi(d\xi). \tag{0.2}$$

Пусть $f(\xi)$ действительная функция, заданная на X и измеримая относительно F_X, $F_n(x)$ — функция распределения суммы

$$S_n = \frac{1}{B_n}\sum_1^n f(x_i) - A_n, \tag{0.3}$$

где A_n и $B_n > 0$ — постоянные.

Как и при изучении сумм независимых одинаково распределенных случайных величин возникает вопрос к каким законам и при каких условиях может сходиться последовательность $F_n(x)$. Но если для независимых случайных величин эта задача полностью решена, то для случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова, она далека от окончательного решения. Исследование затрудняется тем, что поведение $F_n(x)$ существенным образом зависит от эргодических свойств цепи. Чтобы упростить задачу, приходится рассматривать цепи с достаточно сильно выраженными эргодическими свойствами.

Наиболее полно исследованы условия, достаточные для справедливости центральной предельной теоремы. Еще Марков доказал центральную предельную теорему для трех состояний при условии, что все вероятности перехода положительны. Различные варианты доказательства этой теоремы для конечного числа состояний были даны Романовским, Михоком, Шульцем.

В 1937 г. Деблин [3] при некоторых ограничениях на функцию вероятностей перехода доказал центральную предельную теорему для произвольного множества состояний в предположении, что $f(\xi)$ ограничена. В монографии Дуба [12] и статье Дынкина [11] вместо ограниченности $f(\xi)$ предполагается, что при некотором $\delta > 0$

$$\int_X |f(\xi)|^{2+\delta}\, p(d\xi) < \infty, \tag{0.3}$$

где $p(\cdot)$ — стационарное распределение вероятностей, соответствующее $p(\cdot,\cdot)$. Что касается сходимости к предельным законам, отличным от нормального, то этот вопрос изучен очень мало. В 1938 г. Деблин [4] показал, что в случае счетной цепи можно свести изучение сумм вида (0.3) к изучению сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Метод Деблина позволяет утверждать, что для определенного класса счетных цепей множество возможных предельных законов совпадает с множеством устойчивых законов. Устойчивые законы для числа попаданий в фиксированное состояние счетной цепи были получены в 1949 г. Феллером [13].

Другим важным направлением является изучение условий, при которых справедлива локальная предельная теорема. Локальная предельная теорема для конечных цепей была доказана в 1949 г. Колмогоровым [9], который использовал упомянутый выше метод Деблина. Наконец, боль-

шого внимания заслуживают уточнения предельных теорем. В 1952 г. С. Х. Сираждинову [10] удалось получить уточнения локальной и интегральной предельных теорем для конечного числа состояний.

На этом мы заканчиваем краткий обзор основных результатов в той области теории цепей Маркова, которой посвящена настоящая работа. Единственной его целью было сделать более понятным содержание последней.

Работа состоит из трех глав. В первой главе изучаются асимптотические свойства характеристической функции суммы случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова. Во второй главе исследуется сходимость к нормальному закону и к устойчивым законам, отличным от нормального. В третьей главе доказывается локальная предельная теорема и получаются асимптотические разложения. Основным методом исследования является метод характеристических функций.

ГЛАВА I

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Строение линейного оператора, определяемого функцией вероятностей перехода

Пусть $p(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет следующему условию.

Найдется целое положительное k такое, что

$$\sup_{\xi,\eta,A} |p^{(k)}(\xi, A) - p^{(k)}(\eta, A)| = \delta < 1, \quad \xi, \eta \in X, \quad A \in F_X \tag{1.1}$$

Нетрудно показать, что при выполнении условия (1.1) существует такое распределение вероятностей $p(\cdot)$, что

$$|p(A) - p^{(n)}(\xi, A)| \leqslant \delta^{\frac{n}{k}-1}, \quad \xi \in X, \quad A \in F_X. \tag{1.2}$$

Очевидно,

$$p(A) = \int_X p(\xi, A)\, p(d\xi), \tag{1.3}$$

т. е. $p(\cdot)$ является стационарным распределением.

Полагая $\delta^{\frac{1}{k}} = \rho$ и $\delta^{-1} = \gamma$, получаем, что

$$|p(A) - p^{(n)}(\xi, A)| \leqslant \gamma\rho^n \tag{1.4}$$

равномерно относительно $\xi \in X$ и $A \in F_X$. Обратно, из (1.4) следует, что выполнено условие (1.1).

Пусть $\mathfrak{M}$ — пространство всех ограниченных комплексных функций $g(\xi)$, $\xi \in X$, измеримых относительно F_X с нормой $\|g(\xi)\| = \sup_{\xi \in X} |g(\xi)|$, $\mathfrak{M}^*$ — пространство всех комплексных вполне аддитивных функций множества $\mu(A)$, $A \in F_X$. с нормой $\|\mu\| = V|\mu|$ ($V|\mu|$ — полная вариация $\mu(\cdot)$ на X).

Определим операторы P и P^* следующим образом:

$$Pg(\cdot) = \int_X g(\xi)\, p(\cdot, d\xi),$$

$$P^*\mu(\cdot) = \int_X p(\xi, \cdot)\, \mu(d\xi). \tag{1.5}$$

Очевидно,

$$\|P\| = \|P^*\|.$$

В дальнейшем мы часто будем называть вполне аддитивную функцию множества $\Phi(\xi, A)$, $\xi \in X, A \in F_X$, с ограниченной при фиксированном ξ полной вариацией, определяющую в $\mathfrak{M}$ оператор типа P, ядром этого оператора.

Пусть P_1 — оператор в $\mathfrak{M}$, определяемый стационарным распределением вероятностей $p(\cdot)$. Очевидно,

$$PP_1 = P_1P = P_1 = P_1^2, \tag{1.6}$$

P_1 проектирует $\mathfrak{M}$ на одномерное подпространство $\mathfrak{M}_1$, порожденное функцией $\psi(\cdot) \equiv 1$.

Нетрудно видеть, что спектр оператора P равен сумме спектров операторов P_1 и $P - P_1$, рассматриваемых соответственно в $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_2$ состоит из тех элементов g, для которых $P_1 g = 0$.

Из (1.6) следует

$$(P - P_1)^n = P^n - P_1. \tag{1.7}$$

Обозначим через $V_n(\xi, A)$ полную вариацию меры

$$p^{(n)}(\xi, B) - p(B)$$

на множестве A.

Вследствие (1.4)

$$V_n(\xi, A) \leqslant 2\gamma\rho^n. \tag{1.8}$$

Поэтому

$$\|(P - P_1)^n\| \leqslant 2\gamma\rho^n. \tag{1.9}$$

Поскольку резольвентному множеству оператора $P - P_1$ принадлежат все точки z, для которых

$$|z| > \lim \|(P - P_1)^n\|^{\frac{1}{n}}$$

из (1.9) вытекает (см. [16], стр. 454), что спектр оператора $P - P_1$ лежит в круге радиуса ρ с центром в точке 0. Спектр оператора P_1, очевидно, состоит из единственной точки 1. Следовательно, область, внешняя к кругу радиуса ρ с центром в точке 0, из которой удалена точка 1, целиком содержится в резольвентном множестве оператора P.

Нетрудно видеть, что резольвента оператора P

$$R(z) = \frac{1}{z-1} P_1 + \sum_0^\infty (P - P_1) z^{-n-1} \tag{1.10}$$

для $|z| > \rho$.

§ 2. Оператор $P(\theta)$ и его спектральное разложение

Рассмотрим теперь в $\mathfrak{M}$ оператор $P(\theta)$, который порождается ядром $p(\theta; \xi, A) = \int_A e^{i\theta f(\eta)} p(\xi, d\eta)$, $A \in F_X$, где $f(\eta)$ — действительная функция,

измеримая относительно F_X. Если $\| P(\theta) - P \| < \frac{1}{\| R(z) \|}$, то ряд

$$\sum_0^\infty R(z) [(P(\theta) - P) R(z)]^k \tag{1.11}$$

сходится и определяет для $P(\theta)$ резольвентный оператор $R(z, \theta)$.

Пусть I_1 и I_2 — окружности с центрами соответственно в точках 1 и 0 и радиусами $\rho_1 = \frac{1-\rho}{3}$ и $\rho_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\rho$.

В дальнейшем мы всегда будем обозначать (g, μ) функционал

$$\int_X g(\xi)\, \mu(d\xi), \quad g \in \mathfrak{M}, \quad \mu \in \mathfrak{M}^*.$$

Лемма 1.1. *Существует такое* $\varepsilon > 0$, *что при* $\| P - P(\theta) \| < \varepsilon$

$$P^n(\theta) = \lambda^n(\theta) P_1(\theta) + O(\rho_2^n), \tag{1.12}$$

где

$$P_1(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_1} R(z, \theta)\, dz, \tag{1.13}$$

$$\lambda(\theta) = \frac{(P(\theta) P_1(\theta) \psi, p)}{(P_1(\theta) \psi, p)},$$

а через $O(\rho_2^n)$ *обозначен оператор* T_n, *норма которого* $\| T_n \| = O(\rho_2^n)$.

Доказательство. Пусть M_δ есть $\sup \| R(z) \|$ в области, внешней по отношению к кругам с центрами в 0 и 1 и радиусами соответственно $\delta + \rho$ и δ, причем $\delta < \rho_1$ и $\delta + \rho < \rho_2$.

Нетрудно видеть, что если

$$\| P(\theta) - P \| < \frac{1}{M_\delta}, \tag{1.14}$$

то I_1 и I_2 лежат в резольвентном множестве оператора $P(\theta)$.

Рассмотрим проекционные операторы

$$P_1(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_1} R(z, \theta)\, dz, \tag{1.15}$$

$$P_2(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_2} R(z, \theta)\, dz.$$

Пусть $\mathfrak{M}_1(\theta)$ — подпространство, на которое $P_1(\theta)$ проектирует $\mathfrak{M}$. Если

$$\| P_1(\theta) - P_1 \| < 1, \tag{1.16}$$

то $\mathfrak{M}_1(\theta)$ — одномерно. В самом деле, допустим противное. Тогда в $\mathfrak{M}_1(\theta)$ найдутся два линейно независимых элемента h_1 и h_2. Очевидно, $P_1 h_1 = \gamma P_1 h_2$, где γ некоторое комплексное число.

Если $h = h_1 - \gamma h_2$, то $P_1 h = 0$. Следовательно,

$$(P_1(\theta) - P_1) h = h,$$

а это противоречит (1.16).

Итак, пусть выполнено (1.16). Обозначим $\psi(\theta)$ элемент, порождающий $\mathfrak{M}_1(\theta)$. Очевидно,

$$P(\theta) P_1(\theta) \psi(\theta) = P_1(\theta) P(\theta) \psi(\theta) = \lambda(\theta) \psi(\theta). \tag{1.17}$$

С другой стороны, мы можем выбрать $\psi(\theta)$ так, что $\psi(\theta) = P_1(\theta)\psi$. Из (1.17) тогда следует

$$(P(\theta)P_1(\theta)\psi, p) = \lambda(\theta)(P_1(\theta)\psi, p). \tag{1.18}$$

Далее

$$P^n(\theta) = P^n(\theta)P_1(\theta) + P^n(\theta)P_2(\theta), \tag{1.19}$$

$$P^n(\theta)P_2(\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{I_2} z^n R(z, \theta)\,dz. \tag{1.20}$$

Из (1.17) следует

$$P^n(\theta)P_1(\theta) = \lambda^n(\theta)P_1(\theta). \tag{1.21}$$

В силу (1.20)

$$\|P^n(\theta)P_2(\theta)\| \leqslant \sup_{z\in I_2}\|R(z, \theta)\|\rho_2^n. \tag{1.22}$$

Если ε таково, что выполнены (1.14) и (1.16), то из (1.18), (1.19), (1.21) и (1.22) вытекает утверждение леммы.

§ 3. Строение максимального по модулю собственного значения оператора $P(\theta)$

Обозначим оператор $(P(\theta) - P)R(z)$ через $A(z, \theta)$. Тогда в силу (1.11) и (1.15)

$$P_1(\theta) = P_1 + \frac{1}{2\pi i}\sum_1^\infty \int_{I_1} R(z)A^k(z, \theta)\,dz,$$

$$P(\theta)P_1(\theta) = P_1 + \frac{1}{2\pi i}\sum_1^\infty \int_{I_1} zR(z)A^k(z, \theta)\,dz. \tag{1.23}$$

Из (1.13) и (1.23) следует

$$\lambda(\theta) = \frac{1 + \sum_1^\infty B_k(\theta)}{1 + \sum_1^\infty C_k(\theta)}, \tag{1.24}$$

где

$$B_k(\theta) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{I_1} zR(z)A^k(z, \theta)\,dz\psi, p\right),$$

$$C_k(\theta) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{I_1} R(z)A^k(z, \theta)\,dz\psi, p\right). \tag{1.25}$$

Лемма 1.2. *Если* $\left|\sum_1^\infty C_m(\theta)\right| < 1$, *то*

$$\lambda(\theta) = \int_X e^{i\theta f(\xi)}p(d\xi) + \sum_1^\infty\left\{\int_X e^{i\theta f(\xi)}p(d\xi)\int_X e^{i\theta f(\eta)}p^k(\xi, d\eta) - \right.$$
$$\left. -\left(\int_X e^{i f(\xi)}p(d\xi)\right)\right\} + W(\theta), \tag{1.26}$$

где

$$W(\theta) = -\sum_{3}^{\infty} C_m(\theta) + \sum_{3}^{\infty} B_m(\theta) + \sum_{2}^{\infty} (-1)^k \Big(\sum_{2}^{\infty} C_m(\theta)\Big)^k + \\ + \sum_{1}^{\infty} B_m(\theta) \Big[\sum_{1}^{\infty} (-1)^k \Big(\sum_{2}^{\infty} C_m(\theta)\Big)^k\Big]. \tag{1.27}$$

Доказательство. Обозначим $P(\theta) - P$ через $G(\theta)$. Оператор $G(\theta)$ определяется ядром

$$\int_A \widetilde{f}(\eta, \theta)\, p(\xi, d\eta), \tag{1.28}$$

где

$$\widetilde{f}(\eta, \theta) = if(\eta) \int_0^0 e^{itf(\eta)} dt. \tag{1.29}$$

Преобразуем выражения (1.25) для $C_1(\theta)$ и $B_1(\theta)$. С этой целью рассмотрим интегралы

$$K_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} zR(z)\, A(z, \theta)\, dz$$

и

$$K_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} R(z)\, A(z, \theta)\, dz.$$

Обозначим $\frac{1}{z-1} P_1$ и $\sum_0^{\infty} (P^{k+1} - P_1) z^{-k-1}$ соответственно через $R_1(z)$ и $R_2(z)$.

Путем несложных вычислений получаем

$$K_1 = P_1 G(\theta) P_1 + P_1 G(\theta) R_2(1) + R_2(1) G(\theta) P_1, \\ K_2 = P_1 G(\theta) R_2(1) + R_2(1) G(\theta) P_1. \tag{1.30}$$

Поскольку $R_2(1)\psi = 0$, из (1.30) следует

$$B_1(\theta) = \int_X e^{i\theta f(\eta)} p(d\eta) - 1, \\ C_1(\theta) = 0. \tag{1.31}$$

Аналогично

$$B_2(\theta) - C_2(\theta) = \sum_1^{\infty} \Big\{ \int_X e^{i\theta f(\xi)} p(d\xi) \int_X e^{i\theta f(\eta)} p^k(\xi, d\eta) - \Big(\int_X e^{i\theta f(\xi)} p(d\xi) \Big)^2 \Big\}. \tag{1.32}$$

Из (1.24), (1.31) и (1.32) вытекает (1.26).

Лемма 1.3. *Существует постоянная* Δ, *зависящая от* ν *и* $f(\cdot)$, *такая, что при* $|\theta| < \Delta$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 < \nu \leqslant 1$,

$$\Big| \lambda(\theta) - \int_X e^{i\theta f(\xi)} p(d\xi) \Big| < \sup_{\xi} \int_X |f(\eta)|^{\nu} p(\xi, d\eta) \cdot \int_X |f(\eta)|^{\alpha} p(d\eta)\, |\theta|^{\alpha+\nu} \tag{1.33}$$

Доказательство. В силу (1.24)

$$\lambda(\theta)=\int_X e^{i\theta f(\eta)}\,p(d\eta)+\sum_1^\infty(-1)^k\Big(\sum_2^\infty C_m(\theta)\Big)^k\Big[\sum_1^\infty B_k(\theta)+1\Big]+\sum_2^\infty B_k(\theta), \tag{1.34}$$

если $\Big|\sum\limits_1^\infty C_m(\theta)\Big|<1$.

Нетрудно видеть, что

$$C_k(\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} P_1R(z)\,G(\theta)\,A^{k-1}(z,\theta)\,\psi\,dz. \tag{1.35}$$

В силу (1.28)

$$\|A(z,\theta)\|\leqslant 2\|R(z)\|\sup_\xi\int_X|f(\eta)|^\nu\,p(\xi,d\eta)\,|\theta|^\nu. \tag{1.36}$$

Далее

$$P_1R(z)(P(\theta)-P)=\frac{1}{z-1}(P_1(\theta)-P_1), \tag{1.37}$$

$$\|P_1(\theta)-P_1\|\leqslant 2\int_X|f(\eta)|^\alpha\,p(d\eta)\,|\theta|^\alpha.$$

Из (1.35) — (1.37) следует

$$\|C_k(\theta)\|\leqslant Q_1^{k-1}|\theta|^{\alpha+(k-1)\nu}\Big[\sup_\xi\int_X|f(\eta)|^\nu\,p(\xi,d\eta)\Big]^{k-1}\int_X|f(\eta)|^\alpha\,p(d\eta), \tag{1.38}$$

где Q_1 — постоянная, не зависящая от k, α, ν и $f(\cdot)$. Аналогично,

$$\|B_k(\theta)\|\leqslant Q_2^{k-1}|\theta|^{\alpha+(k-1)\nu}\Big[\sup_\xi\int_X|f(\eta)|^\nu(\xi,d\eta)\Big]^{k-1}\int_X|f(\eta)|^\alpha\,p(d\eta), \tag{1.39}$$

где Q_2 — постоянная, не зависящая от k, α, ν и $f(\cdot)$. Из (1.34), (1.38), (1.39) следует утверждение леммы.

§ 4. Оценка для $\lambda''(\theta)$

Лемма 1.4. *Существуют функция* $\Phi(t)>0$ *и постоянная* $\Delta>0$, *не зависящие от* $f(\cdot)$, *такие, что*

$$\lim_{t\to 0}\Phi(t)=0$$

и

$$|\lambda''(\theta)-\lambda''(0)|<\Phi(M\theta)\int_X f^2(\xi)\,p(d\xi), \tag{1.40}$$

если $|\theta|<\frac{\Delta}{M}$, *где* $M=\sup\limits_{\xi\in X}|f(\xi)|$.

Доказательство. Оценим сначала $B_k''(\theta)$ и $C_k''(\theta)$ для $k\geqslant 2$. Пусть операторы $G^{(1)}(\theta)$ и $G^{(2)}(\theta)$ определяются соответственно ядрами

$$\int_A\frac{d}{d\theta}\widetilde{f}(\eta,\theta)\,p(\xi,d\eta)$$

и

$$\int_A \frac{d^2}{d\theta^2} \tilde{f}(\eta, \theta)\, p(\xi, d\eta).$$

В силу (1.25) $\overset{''}{B}_k(\theta)$ состоит из членов $b^{j_1 j_2 \dots j_k}_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}(\theta)$ вида

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{I_1} zR_{i_1}G^{(j_1)}(\theta)\, R_{i_2}(z)\, G^{(j_2)}(\theta) \dots G^{(j_k)}(\theta)\, R_{i_{k+1}}(z)\, dz\psi, p\right), \qquad (1.41)$$

где i_m и j_m принимают соответственно значения 1,2 и 0,1,2, $\sum_1^k j_m = 2$, $G^{(0)}(\theta) = G(\theta)$.

Если $i_{k+1} = 2$, то $b^{j_1 j_2 \dots j_k}_{i_1 \dots i_{k+1}}(\theta) = 0$, поскольку $R_2(z)\,\psi \equiv 0$. Поэтому мы можем считать, что $i_{k+1} = 1$.

По определению $R_2(z)$

$$G^{(i_1)}(\theta)\, R_2(z) \dots G^{(i_k)}(\theta)\, R_2(z)\, G^{(i_{k+1})}(\theta) =$$
$$= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} G^{(i_k)}(\theta)\,(P^{n_1} - P_1) \dots (P^{n_k} - P_1)\, G^{(i_{k+1})}(\theta)\, z^{-n_1 - n_2 - \dots - n_k - k} \qquad (1.42)$$

Оператор

$$M^{n_1 n_2 \dots n_k}_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}(\theta) = P_1 G^{(i_1)}(\theta)\,(P^{n_1} - P_1)\, G^{(i_2)}(\theta)\,(P^{n_2} - P_1) \dots$$
$$\dots (P^{n_k} - P_1)\, G^{(i_{k+1})}(\theta), \quad 0 \leqslant i_m \leqslant 2, \quad m = 1, 2, \dots, k+1,$$

порождается ядром

$$\int_A g^{(i_1)}(\xi_1, \theta)\, p(d\xi_1) \int_X g^{(i_2)}(\xi_2, \theta)\,(p^{(n_1+1)}(\xi_1, d\xi_2) - p(d\xi_2)) \dots$$
$$\dots \int_X g^{(i_{k+1})}(\xi_{k+1}, \theta)\,(p^{(n_k+1)}(\xi_k, d\xi_{k+1}) - p(d\xi_{k+1})). \qquad (1.43)$$

Рассмотрим сначала случай, когда некоторое $i_l = 2$, $l \neq i_1$, $i_m = 0$, $m \neq l$.

По неравенству Гельдера

$$\| M^{n_1 n_2 \dots n_k}_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}(\theta) \| \leqslant \int_X |\, g^{(i_1)}(\xi_1, \theta)\,|\, p(d\xi_1) \int_X |\, g^{(i_2)}(\xi_2, \theta)\,|\, V_{n_1+1}(\xi_1, d\xi_2) \dots$$
$$\dots \int_X |\, g^{(i_{k+1})}(\xi_{k+1}, \theta)\,|\, V_{n_k+1}(\xi_k, d\xi_{k+1}) \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int_X |\, g^{(i_1)}(\xi_1, \theta)\,|^r\, p(d\xi_1)\right]^{\frac{1}{r}} \left[\int_X p(d\xi_1) \left(\int_X |\, g^{(i_2)}(\xi_2, \theta)\,|\, V_{n_1+1}(\xi_1, d\xi_2) \dots\right.\right.$$
$$\left.\left. \dots \int_X |\, g^{(i_{k+1})}(\xi_{k+1}, \theta)\,|\, V_{n_k+1}(\xi_k, d\xi_{k+1})\right)^s\right]^{\frac{1}{s}}, \qquad (1.44)$$

$$\int_X |g^{(i_2)}(\xi_2,\ \theta)|\,V_{n_1+1}(\xi_1,\ d\xi_2)\ldots\int_X |g^{i_{k+1}}(\xi_{k+1},\theta)|\,V_{n_k+1}(\xi_k,\ d\xi_{k+1}) \leqslant$$

$$\leqslant V_{n_1+1}^{\frac{1}{r}}(\xi_1,X)\left[\int_X V_{n_1+1}(\xi_1,\ d\xi_2)\,|g^{(i_2)}(\xi_2,\ \theta)|^s\left(\int_X |g^{(i_3)}(\xi_3,\ \theta)|\,V_{n_2+1}(\xi_2,\ d\xi_3)\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots\int_X |g^{(i_{k+1})}(\xi_{k+1},\ \theta)|\,V_{n_k+1}(\xi_k,\ d\xi_{k+1})\right)^s\right]^{\frac{1}{s}}, \tag{1.45}$$

где $\frac{1}{s}+\frac{1}{r}=1$.

Применяя последовательно неравенства (1.45) и (1.8) и учитывая, что $V_n(\xi,\ A)\leqslant p(A)+p^{(n)}(\xi,\ A)$, получаем

$$\|M_{i_1 i_2\ldots i_{k+1}}^{n_1 n_2\ldots n_k}(\theta)\| \leqslant 2^k\gamma^{\frac{k}{r}}\rho^{\left(\sum_1^k n_i+k\right)}\left(\sup_{\xi,\ q\neq l}|g^{(i_q)}(\xi,\theta)|\right)^{k-1}$$

$$\mathbf{E}^{\frac{1}{r}}|g^{(i_1)}(x_1,\ \theta)|^r\,\mathbf{E}^{\frac{1}{s}}|g^{(i_l)}(x_1,\ \theta)|^s, \tag{1.46}$$

где x_1 имеет стационарное распределение, а $\mathbf{E}$ — символ математического ожидания. Вследствие (1.28)

$$\sup_{\xi,\ q\neq l}|g^{(i_q)}(\xi,\ \theta)| \leqslant M|\theta|,$$

$$|g^2(\xi,\ \theta)| \leqslant f^2(\xi), \tag{1.47}$$

откуда следует $|g^{(0)}(\xi,\ \theta)| \leqslant |f(\xi)|\,|\theta|$,

$$\mathbf{E}^{\frac{1}{r}}|g^{(0)}(x_1,\ \theta)|^r\,\mathbf{E}^{\frac{1}{s}}f^{2s}(x_1) \leqslant M|\theta|\,\mathbf{E}^{\frac{1}{r}}|f(x_1)^{r\delta}\mathbf{E}^{\frac{1}{s}}|f(x_1)|^{2s-\delta s}. \tag{1.48}$$

Если положить $s=\frac{2}{2-\delta}$, то из (1.46) и (1.48) вытекает

$$\|M_{i_1 i_2\ldots i_{k+1}}^{n_1 n_2\ldots n_k}(\theta)\| \leqslant 2^k\gamma^{\frac{k\delta}{2}}M^k|\theta|^k\rho^{\frac{\delta}{2}\left(\sum_1^k n_i+k\right)}\mathbf{E}f^2(x_1)$$

или, поскольку δ можно сделать сколь угодно близким к 2,

$$\|M_{i_1 i_2\ldots i_{k+1}}^{n_1 n_2\ldots n_k}(\theta)\| \leqslant 2^k\gamma^k M^k|\theta|^k\rho^{\sum_1^k n_i+k}\mathbf{E}f^2(x_1). \tag{1.49}$$

Нетрудно видеть, что оценка (1.49) справедлива и в том случае, когда $i_1=2$, $i_m=0$, $m\neq i_1$.

Если для некоторых s и p, $i_s=1$, $i_p=1$, $i_m=0$, $m\neq p$, s, то аналогичные рассуждения приводят к оценке

$$\|M_{i_1 i_2\ldots i_{k+1}}^{n_1 n_2\ldots n_k}(\theta)\| \leqslant 2^k\gamma^k M^{k-1}|\theta|^{k-1}\rho^{\sum_1^k n_i+k}\mathbf{E}f^2(x_1). \tag{1.50}$$

Далее, исходя из (1.46), нетрудно показать, что

$$\| M^{n_1 n_2 \dots n_k}_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}(\theta) \| \leqslant \begin{cases} 2^k \gamma^k M^k \, | \theta |^k \rho^{\sum_1^k n_i + k} \, \mathbf{E} | f(x_1) |, & \text{если } \sum_1^{k+1} i_m = 1 \\ 2^k \gamma^k M^{k+1} | \theta |^{k+1} \rho^{\sum_1^k n_i + k}, & \text{если } \sum_1^{k+1} i_m = 0. \end{cases} \tag{1.51}$$

Обозначим оператор

$$R_1(z) G^{(i_1)}(\theta) R_2(z) \dots R_2(z) G^{(i_k - 1)}(\theta) R_2(z) G^{(i_k)}(\theta)$$

через

$$L(i_1, i_2, \dots, i_k, z, \theta).$$

Из (1.43), (1.50)—(1.52) выводим

$$\| L(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}, z, \theta) \| \leqslant \frac{2^k}{|z-1|} \gamma^k \, | M\theta |^{k+1 - \sum_1^{k+1} i_m} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{|z|}\right)^k} \mathbf{E} | f(x_1) |^{\sum_1^{k+1} i_m}. \tag{1.52}$$

С другой стороны,

$$\left(\int_{I_1} z R_1(z) G^{(j_1)}(\theta) R_{i_2}(z) \dots \quad G^{(j_k)}(\theta) R_1(z) \, dz \, \psi, \; p \right) =$$

$$= \left(\int_{I_1} z L(j_1, j_2, \dots, j_{s_1}, z, \theta) L(j_{s_1+1}, \dots, j_{s_2}, z, \theta \right) \dots \tag{1.53}$$

$$L(j_{s_m+1}, \dots, j_k, z, \theta) R_1(z) \, dz \; \psi, \; p),$$

если

$$i_{s_1} = i_{s_2} = \dots = i_{s_m} = 1.$$

Нетрудно видеть, что

$$\left(\int_{I_1} z R_2(z) G^{(j_1)}(\theta) R_{i_2}(z) \dots G^{(j_k)}(\theta) R_1(z) \, dz \, \psi, \; p \right) =$$

$$= \int_{I_1} z P_1 R_2(z) G^{(j_1)}(\theta) R_{i_2}(z) \dots G^{(j_k)}(\theta) R_1(z) \, \psi \, dz = 0. \tag{1.54}$$

Из (1.41) и (1.52) — (1.54) следует

$$\| b^{j_1 \dots j_k}_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}(\theta) \| \leqslant B^k \, | M\theta |^{k-2} \mathbf{E} f^2(x_1), \tag{1.55}$$

где B — постоянная, не зависящая от k и $f(\cdot)$. Число различных комбинаций из индексов j_m равно k^2, а из индексов i_m при условии, что $i_1 = i_{k+1} = 1$, равно 2^{k-1}.

Поэтому

$$| B_k^{''}(\theta) | \leqslant 2^{k-1} B^k k^2 \, | M\theta |^{k-2} \mathbf{E} f^2(x_1). \tag{1.56}$$

Аналогично

$$|C_k''(\theta)| \leqslant 2^{k-1}C^k k^2 |M\theta|^{k-2}\mathbf{E}f^2(x_1), \tag{1.57}$$

где C — постоянная, не зависящая от k и $f(\cdot)$.

Заметим, что $B_k'(0) = 0$ и $C_k'(0) = 0$ для $k \geqslant 2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |B_k'(\theta)| &\leqslant \sup_{|t|\leqslant|\theta|} |B_k''(t)|\,|\theta| \leqslant 2^{k-1}B^k k^2 M^{k-2}|\theta|^{k-1}\mathbf{E}f^2(x_1), \\ |C_k'(\theta)| &\leqslant \sup_{|t|\leqslant|\theta|} |C_k''(t)|\,|\theta| \leqslant 2^{k-1}C^k k^2 M^{k-2}|\theta|^{k-1}\mathbf{E}f^2(x_1). \end{aligned} \tag{1.58}$$

Что касается $B_k(\theta)$ и $C_k(\theta)$, то для них нетрудно получить оценки

$$\begin{aligned} |B_k(\theta)| &\leqslant \sup_{z\in I_1}|z|\,(\sup_{z\in I_1}\|R(z)\|)^{k+1}|M\theta|^k, \\ |C_k(\theta)| &\leqslant (\sup_{z\in I_1}\|R(z)\|)^{k+1}|M\theta|^k. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Если

$$|\theta| < \frac{1}{MN}, \tag{1.60}$$

где $N = z\max(B,\ C,\ \sup_{z\in I_1}\|R(z)\|)$, то ряды $\sum_1^\infty B_k(\theta)$, $\sum_1^\infty B_k'(\theta)$, $\sum_1^\infty B_k''(\theta)$, $\sum_1^\infty C_k(\theta)$, $\sum_1^\infty C_k'(\theta)$ и $\sum_1^\infty C_k''(\theta)$ абсолютно и равномерно сходятся и

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left[\sum_2^\infty C_m(\theta)\right]^k =$$

$$= k(k-1)\left[\sum_1^\infty C_m(\theta)\right]^{k-2}\sum_2^\infty \frac{d}{d\theta}C_m(\theta) + k\left[\sum_2^\infty C_m(\theta)\right]^{k-1}\sum_2^\infty \frac{d^2}{d\theta^2}C_m(\theta). \tag{1.61}$$

Если одновременно

$$\begin{aligned} |MN\theta| &< \frac{1}{2}, \\ |MN\theta|^2 N &< \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{1.62}$$

то

$$\left|\sum_2^\infty C_k(\theta)\right| < 1,$$

и из (1.27), (1.56 — 59) и (1.61) следует

$$|W''(\theta)| < AM|\theta|\mathbf{E}f^2(x_1), \tag{1.63}$$

где A — постоянная, не зависящая от $f(\cdot)$. Займемся теперь оценкой разности $[B_2''(\theta) - C_2''(\theta)] - [B_2''(0) - C_2''(0)]$.

Из (1.39) находим, что

$$\begin{aligned} B_2''(\theta) - C_2''(\theta) = \sum_1^\infty [&2\mathbf{E}e^{i\theta f(x_1)}\,\mathbf{E}f^2(x_1)\,e^{i\theta f(x_1)} + 2\mathbf{E}^2 f(x_1)\,e^{i\theta f(x_1)} - \\ &- \mathbf{E}(f(x_1) + f(x_{k+1}))^2\,e^{i\theta(f(x_1)+f(x_{k+1}))}], \end{aligned}$$

$$B_2''(0) - C_2''(0) = -2\sum_1^\infty [\mathbf{E}f(x_1)f(x_{k+1}) - \mathbf{E}^2 f(x_1)]. \tag{1.64}$$

Применяя те же рассуждения, что при выводе (1.57), нетрудно получить

$$|B_2''(\theta) - C_2''(\theta) - 2\sum_1^\infty \left[\mathbf{E}^2 f(x_1)\, e^{i\theta f(x_1)} - \mathbf{E}f(x_1)f(x_{k+1})\, e^{i\theta(f(x_1)+f(x_{k+1}))}\right]| \leqslant$$

$$\leqslant 4\gamma \sum_1^\infty \rho^k (|M\theta| + |M\theta|^2)\mathbf{E}f^2(x_1). \tag{1.65}$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$\begin{aligned} &|\mathbf{E}f(x_1)f(x_{k+1})\, e^{i\theta(f(x_1)+f(x_{k+1}))} - \mathbf{E}^2 f(x_1)\, e^{i\theta f(x_1)}| \leqslant 2\gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{k}{2}}\mathbf{E}f^2(x_1), \\ &|\mathbf{E}^2 f(x_1)\, e^{i\theta f(x_1)} - \mathbf{E}^2 f(x_1)| \leqslant 2M|\theta|\,\mathbf{E}^2|f(x_1)|, \\ &|\mathbf{E}f(x_1)f(x_{k+1})\, e^{i\theta(f(x_1)+f(x_{k+1}))} - \mathbf{E}f(x_1)f(x_{k+1})| \leqslant 2M|\theta|\,\mathbf{E}f^2(x_1). \end{aligned} \tag{1.66}$$

Из (1.64) — (1.66) следует

$$|B_2''(\theta) - C_2''(\theta) - B_2''(0) + C_2''(0)| \leqslant 4\gamma\frac{\rho}{1-\rho}(M|\theta| + |M\theta|^2)\mathbf{E}f^2(x_1) +$$

$$+ 8\gamma^{\frac{1}{2}} \sum_{\left[\left|\frac{1}{M\theta}\right|^{\frac{1}{2}}\right]}^\infty \rho^{\frac{k}{2}}\mathbf{E}f^2(x_1) + 8M|\theta|\left[\frac{1}{|M\theta|^{\frac{1}{2}}}\right]\mathbf{E}f^2(x_1). \tag{1.67}$$

(Квадратные скобки означают целую часть).

Из (1.63), (1.64) и (1.67) вытекает утверждение леммы.

ГЛАВА II

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 1. Общий вид предельных распределений

На протяжении всей главы мы будем предполагать, что выполнено условие (1.1).

Теорема 2.1. *Последовательность функций распределения $F_n(x)$ сумм вида* (0.3) *может сходиться только к устойчивым законам. Если устойчивый закон, к которому сходится $F_n(x)$, имеет характеристический показатель α, то*

$$B_n = n^{\frac{1}{\alpha}} h(n), \tag{2.1}$$

где $h(n)$ медленно изменяющаяся функция, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{h(kn)}{h(n)} = 1$ для любого целого $k > 0$.

Доказательство. Предположим, что x_1 имеет стационарное распределение. Общий случай легко сводится к этому частному. Пусть последовательность $F_n(x)$ сходится к некоторой собственной функции распределения $F(x)$. Тогда

$$B_n \to \infty,$$

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} \to 1.$$

Пусть a_1 и a_2 — два любых положительных числа. Выберем две последовательности $m = m(n)$ и $l = l(n)$ так, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_m}{B_n} = \frac{a_1}{a_2},$$

$$\lim_{n\to\infty} l(n) = \infty, \tag{2.2}$$

и

$$\operatorname{p\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{B_n} \sum_1^l f(x_l) = 0$$

(символ $\operatorname{p\lim}_{n\to\infty}$ означает предел по вероятности).

Рассмотрим сумму

$$\frac{1}{a_1}\left(\frac{1}{B_n}\sum_1^n f(x_k) - A_n - b_1\right) + \frac{1}{a_1 B_n}\sum_{n+1}^{n+l} f(x_k) +$$

$$+ \frac{B_m}{a_1 B_n}\left(\frac{1}{B_m}\sum_{n+l+1}^{n+l+m} f(x_k) - A_m - b_2\right) = \frac{1}{a_1 B_n}\sum_1^{n+l+m} f(x_k) - C_n, \tag{2.3}$$

где

$$C_n = \frac{1}{a_1 B_n}(B_n A_n + B_m A_m + b_1 B_n + b_2 B_m).$$

Функции распределения первого и третьего слагаемых левой части (2.3) сходятся соответственно к $F(a_1 x + b_1)$ и $F(a_2 x + b_2)$. С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$\left| F_{n+l+m}\left(\frac{a_1 B_n}{B_{n+l+m}} x - A_{n+m+l} + C_n \frac{B_n a_1}{B_{n+l+m}}\right) - \right.$$

$$\left. - F(a_1 x + b_1) * F_m\left(\frac{a_1 B_n}{B_m} x + b_2\right)\right| \leqslant 2\gamma e^l \tag{2.4}$$

В силу (2.2) и (2.4) функция распределения левой части (2.3) сходится к композиции $F(a_1 x + b_1)$ и $F(a_2 x + b_2)$.

Функция распределения правой части может сходиться лишь к функции распределения вида $F(a_3 x + b_3)$, где $a_3 > 0$ и b_3 — некоторые постоянные.

Следовательно,

$$F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2) = F(a_3 x + b_3), \tag{2.5}$$

т. е. $F(x)$ — устойчивый закон

Для доказательства второй части теоремы мы воспользуемся методом, предложенным В. М. Золотаревым. Пусть $F_n(x)$ сходится к устойчивому закону с показателем α. Если $v(\theta)$ — характеристическая функция этого закона, то, как известно ([6], стр. 101),

$$|v(\theta)| = e^{-c|\theta|^\alpha},\ c > 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left|v_n\left(\frac{\theta}{B_n}\right)\right| = e^{-c|\theta|^\alpha}, \tag{2.6}$$

где $v_n(\theta)$ — характеристическая функция $\sum_1^n f(x_k)$. С другой стороны, нетрудно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|v_{nk}\left(\frac{\theta}{B_{nk}}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|v_n\left(\frac{\theta}{B_{nk}}\right)\right|^k, \tag{2.7}$$

откуда вследствие (2.6) вытекает

$$\lim_{n\to\infty}\left|v_n\left(\frac{\theta}{B_{nk}}\right)\right| = e^{-c\frac{|\theta|^\alpha}{k}}. \tag{2.8}$$

Из (2.6) и (2.8) следует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_{nk}}{B_n} = k^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.9}$$

Соотношение (2.9), очевидно, эквивалентно (2.1).

§ 2. Центральная предельная теорема

Теорема 2.2. *Если*

$$\int_X |f(\eta)|^2 p(d\eta) < \infty \tag{2.10}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n\left(f(x_k) - \int_X f(\eta)\, p(d\eta)\right)\right]^2 = \sigma^2 > 0, \tag{2.11}$$

то при любом начальном распределении

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n\left(f(x_k) - \int_X f(\eta)\, p(d\eta)\right) < x\right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\, du. \tag{2.12}$$

Эта теорема является аналогом известной теоремы П. Леви для суммы одинаково распределенных независимых случайных величин.

Доказательство. Мы по-прежнему ограничиваемся случаем, когда x_i одинаково распределены. Не нарушая общности, мы можем полагать, что $\mathbf{E}f(x_i) = 0$. Рассмотрим, наряду с функцией $f(\cdot)$, функцию $f_n(\cdot)$, определенную следующим образом:

$$f_n(\xi) = f(\xi), \text{ если } |f(\xi)| < M(n),$$
$$f_n(\xi) = 0, \quad \text{если } |f(\xi)| \geqslant M(n),$$

где $M(n)$ — постоянная, зависящая от n. Обозначим $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n f(x_k)$ и $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n f_n(x_k)$ соответственно S_n и S_n'. Нетрудно видеть, что

$$\Pr(S_n < x) - \Pr(S'_n < x) | \leqslant 2n \int\limits_{|x| \geqslant M(n)} dF(x), \tag{2.13}$$

где

$$F(x) = \Pr(f(x_i) < x).$$

Поскольку

$$n \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon \sqrt{n}} dF(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon \sqrt{n}} x^2 dF(x),$$

то

$$n \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon \sqrt{n}} dF(x) = 0 \tag{2.14}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Следовательно, можно выбрать последовательность $\psi(n) > 0$ такую, что

$$\lim_{n \to \infty} \psi(n) = 0$$

и

$$\lim_{n \to \infty} n \int\limits_{|x| \geqslant \psi(n) \sqrt{n}} dF(x) = 0. \tag{2.15}$$

Пусть

$$M(n) = \psi(n) \sqrt{n}. \tag{2.16}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{E} e^{i\theta S'_n} = \left(P_n^{n-1}\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) \psi, \quad p_n\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) \right). \tag{2.17}$$

Оператор $P_n(\theta)$ определяется ядром

$$p_n(\theta, \xi, A) = \int\limits_A e^{i\theta f_n(\eta)} p(\xi, d\eta),$$

$p_n(\theta, A)$ — вполне аддитивная функция множества $\int\limits_A e^{i\theta f_n(\eta)} p(d\eta)$.

В силу (1.28)

$$\| P_n(\theta) - P \| \leqslant M(n) | \theta |. \tag{2.18}$$

Следовательно, по лемме 1.1, начиная с некоторого $n = n(\theta)$,

$$P_n^n\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) = \lambda_n^n\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) P_{1n}\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) + O(\rho_2^n). \tag{2.19}$$

Разлагая $\ln \lambda_n\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)$ в ряд, получаем

$$\ln \lambda_n^n\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) = n\left[\lambda_n\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) - 1 + O\left(\left(\lambda_n\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)^2\right)\right]. \tag{2.20}$$

С другой стороны,

$$\lambda_n\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{\theta}{\sqrt{n}}\lambda_n'(0) + \frac{\theta^2}{2n}\lambda_n''(0) + \frac{\theta^2}{2n}\times$$
$$\times\left[\lambda_n''\left(\frac{\bar{\theta}}{\sqrt{n}}\right) - \lambda_n''(0)\right], \quad 0 < |\bar{\theta}| < |\theta|.$$

Из (1.26), (1.64) и (1.66) вытекает

$$-\lim_{n\to\infty}\lambda_n''(0) = \mathbf{E}f^2(x_1) + 2\sum_1^\infty \mathbf{E}f(x_1)f(x_{k+1}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n (f(x_k) - \mathbf{E}f(x_k))\right]^2 = \sigma^2. \tag{2.21}$$

Из (1.40) и (2.16) следует

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lambda_n''\left(\frac{\bar{\theta}}{\sqrt{n}}\right) - \lambda_n''(0)\right] = 0. \tag{2.22}$$

Далее, как нетрудно видеть,

$$\lambda_n'(0) = i\int\limits_{|x|<M(n)} x\,dF(x) = -i\int\limits_{|x|\geqslant M(n)} x\,dF(x), \tag{2.23}$$

$$|\lambda_n'(0)| \leqslant \left(\int\limits_{|x|\geqslant M(n)} x^2\,dF(x)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{|x|\geqslant M(n)} dF(x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Вследствие (2.15), (2.16) и (2.23)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\lambda_n'(0) = 0 \tag{2.24}$$

Из (2.20) — (2.24) без труда получаем

$$\lim_{n\to\infty}\ln\lambda_n^n\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) = -\sigma^2\frac{\theta^2}{2}. \tag{2.25}$$

В силу (2.16) и (2.18)

$$\lim_{n\to\infty}\|R_n\left(z, \frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) - R(z)\| = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\|P_{n_1}\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) - P_1\| = 0. \tag{2.26}$$

Аналогично

$$\lim_{n\to\infty}\|p_n\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) - p\| = 0. \tag{2.27}$$

Из (2.17), (2.19), (2.22) и (2.25—2.27) выводим окончательно

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}e^{i\theta S_n'} = e^{-\frac{\theta^2\sigma^2}{2}}, \tag{2.28}$$

а это эквивалентно, в силу (2.13), утверждению теоремы.

§ 3. Сходимость к устойчивым законам, отличным от нормального

Теорема 2.3. *Пусть* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *последовательность независимых случайных величин с функцией распределения*

$$F(x) = \Pr(f(x_1) < x),$$

где x_1 *имеет стационарное распределение.*

Если для некоторой последовательности постоянных A_n *и* $B_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{\sum_1^n u_k}{B_n} - A_n < x\right) = V_\alpha(x), \tag{2.29}$$

где $V_\alpha(x)$ *— устойчивый закон с показателем* α, *и для некоторого* $0 < \nu \leqslant 1$ *и некоторого* $\alpha > \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} nB_n^{-\nu-\min(1,\,\alpha-\nu)} \sup_{\xi} \int\limits_{|f(\eta)|<B_n\tau} |f(\eta)|^\nu p(\xi,\ d\eta) = 0, \tag{2.30}$$

каково бы ни было $\tau > 0$, *то при произвольном начальном распределении*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{1}{B_n}\sum_1^n f(x_k) - A_n < x\right) = V_\alpha(x). \tag{2.31}$$

Доказательство. Мы снова ограничимся случаем, когда x_i одинаково распределены. Поскольку (2.30) выполняется при любом τ, можно выбрать последовательность $\psi(n) > 0$ так, что

$$\lim_{n\to\infty} \psi(n) = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} nB_n^{-\nu-\min(1,\,\alpha-\varepsilon)} \sup_{\xi} \int\limits_{|f(\eta)|<B_n\psi(n)} |f(\eta)|^\nu p(\xi,\ d\eta) = 0, \tag{2.32}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{n^\delta} = 0,$$

каково бы ни было $\delta > 0$.

Пусть $f_n(\cdot)$ определена следующим образом:

$$f_n(\cdot) = f(\cdot), \text{ если } |f(\cdot)| < B_n\psi(n),$$
$$f_n(\cdot) = 0, \text{ если } |f(\cdot)| \geqslant B_n\psi(n).$$

Обозначим S_n и S_n' соответственно $\frac{1}{B_n}\sum_1^n f(x_k) - A_n$ и $\frac{1}{B_n}\sum_1^n f_n(x_k) - A_n$.

Пусть $P_n(\theta)$ определяется ядром

$$\int_A e^{i\theta f_n(\eta)} p(\xi,\ d\eta).$$

В силу (1.28)

$$\| P_n(\theta) - P \| \leqslant 2 \sup_{\xi} \int\limits_{|f(\eta)| < B_n \psi(n)} |f(\eta)|^{\nu} p(\xi, d\eta) |\theta|^{\nu}. \tag{2.33}$$

По теореме 2.1 $B_n = n^{\frac{1}{\alpha}} h(n)$, где $h(n)$ — медленно изменяющаяся функция.

Поэтому из (2.32) следует

$$\lim_{n \to \infty} B_n^{-\nu} \sup_{\xi} \int\limits_{|f(\eta)| < B_n \psi(n)} |f(\eta)|^{\nu} p(\xi, d\eta) = 0. \tag{2.34}$$

Следовательно, по лемме 1.1

$$P_n^n\left(\frac{\theta}{B_n}\right) = \lambda_n^n\left(\frac{\theta}{B_n}\right) P_{1n}\left(\frac{\theta}{B_n}\right) + O(\rho_2^n) \tag{2.35}$$

для всех $n \geqslant n(\theta)$.

Далее, по лемме 1.3, поскольку $\int\limits_X |f(\eta)|^{\alpha-\varepsilon} p(d\eta) < \infty$, $0 < \varepsilon < \alpha$ (см. [14], стр. 192), имеем

$$\ln \lambda_n^n\left(\frac{\theta}{B_n}\right) = n \ln \varphi_n\left(\frac{\theta}{B_n}\right) + O(nB_n^{-\nu-\min(1,\,\alpha-\varepsilon)} \times$$
$$\times \sup_{\xi} \int\limits_{|f(\eta)| < B_n \psi(n)} |f(\eta)|^{\nu} p(\xi, \eta)), \tag{2.36}$$

где $\varphi_n(\theta) = \int\limits_X e^{i\theta f_n(\eta)} p(d\eta)$.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E} e^{i\theta S_n'} = e^{-i\theta A_n}\left(P_n^{n-1}\left(\frac{\theta}{B_n}\right)\psi,\ p_n\left(\frac{\theta}{B_n}\right)\right), \tag{2.37}$$

где $p_n(\theta)$ — вполне аддитивная функция множества

$$\int\limits_A e^{i\theta f_n(\eta)} p(d\eta).$$

Пусть $u_k^{(n)}$ — последовательность независимых случайных величин с функцией распределения

$$F_n(x) = \Pr(f_n(x_1) < x).$$

Как легко проверить,

$$\left| \Pr\left(\frac{1}{B_n} \sum_1^n u_k - A_n < x\right) - \Pr\left(\frac{1}{B_n} \sum_1^n u_k^{(n)} - A_n < x\right) \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2n \int\limits_{|x| \geqslant B_n \psi(n)} dF(x). \tag{2.38}$$

Как известно ([14], стр. 195),

$$\lim_{n\to\infty} nF(B_n x) = \frac{c_1}{|x|^\alpha} \text{ при } x<0,$$

$$\lim_{n\to\infty} n(1-F(B_n x)) = \frac{c_2}{x^\alpha} \text{ при } x>0,$$

где $c_1>0$ и $c_2>0$ — некоторые постоянные.

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} n \int\limits_{|x|\geqslant B_n\psi(n)} dF(x) = 0. \tag{2.39}$$

Из (2.38) и (2.39) следует

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^n\left(\frac{\theta}{B_n}\right) e^{-i\theta A_n} = \lim_{n\to\infty} \varphi_\infty^n\left(\frac{\theta}{B_n}\right) e^{-i\theta A_n}. \tag{2.40}$$

Из (2.30), (2.35—2.37) и (2.40) следует

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} e^{i\theta S_n'} = \varphi_\alpha(\theta), \tag{2.41}$$

где $\varphi_\alpha(\theta)$ — характеристическая функция закона $V_\alpha(x)$.

С другой стороны, как легко видеть,

$$|\Pr(S_n<x) - \Pr(S_n'<x)| \leqslant 2n \int\limits_{|x|\geqslant B_n\psi(n)} dF(x),$$

а это вследствие (2.39) и (2.41) означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(S_n<x) = V_\alpha(x),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Вполне вероятно, что условие (2.30) можно ослабить. Однако какие-то ограничения на порядок роста

$$\sup_\xi \int\limits_{|f(\eta)|<N} |f(\eta)|^\nu p(\xi,\ d\eta),$$

как функции N следует все-таки наложить. Можно построить примеры, в которых

$$\sup_\xi \int\limits_{|f(\eta)|<N} |f(\eta)|\, p(\xi,\ d\eta) = O(N)$$

и предельные распределения для сумм $\frac{1}{B_n}\sum_1^n u_k - A_n$ и $\frac{1}{B_n}\sum_1^n f(x_k) - A_n$ не совпадают. С другой стороны, можно доказать, что всегда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} e^{i\theta S_n} = \lim_{n\to\infty} \lambda_n^n\left(\frac{\theta}{B_n}\right) e^{-i\theta A_n}.$$

Мы не будем на этом останавливаться.

Теорема 2.4. *Если*

$$\int\limits_X |f(\eta)|^\alpha p(d\eta) < \infty,\ 0<\alpha<2.$$

то при некотором выборе постоянных A_n *и произвольном начальном распределении*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\sum_{1}^{n} f(x_k) - A_n < x\right) = E(x), \tag{2.42}$$

где $E(x)$ *— несобственный закон.*

Эта теорема доказывается тем же методом, что и теорема 2.1. Функция $f_n(\cdot)$ определяется следующим образом:

$$f_n(\cdot) = f(\cdot), \text{ если } |f(\cdot)| \leqslant n^{\frac{1}{\alpha}}\psi(n),$$

$$f_n(\cdot) = 0, \quad \text{если } |f(\cdot)| > n^{\frac{1}{\alpha}}\psi(n),$$

причем последовательность $\psi(n)$ выбирается так, что

$$\lim_{n\to\infty}\psi(n) = 0 \tag{2.43}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x| > n^{\frac{1}{\alpha}}\psi(n)} dF(x) = 0$$

(мы сохраняем обозначения § 2 и § 3).

Нетрудно видеть, что

$$\lambda_n(\theta) = \varphi_n(\theta) + O\left(\mathbf{E} f_n^2(x_1)\,\theta^2\right). \tag{2.44}$$

В то же время

$$\mathbf{E} f_n^2(x_1) < n^{\frac{2}{\alpha}-1}\psi^{2-\alpha}(n)\,\mathbf{E}\,|f_n(x_1)|^{\alpha}. \tag{2.45}$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n^n\left(\frac{\theta}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n^n\left(\frac{\theta}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right). \tag{2.46}$$

Оставшуюся часть доказательства мы предоставляем читателю.

ГЛАВА III

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

§ 1. Локальная предельная теорема

Пусть X — счетное множество точек ξ_i и условие (1.1) выполняется при $k = 1$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$\inf_{(i,\,j)}\sum_{k-1}^{\infty}\min\left(p_{ik},\ p_{jk}\right) > 0, \tag{3.1}$$

где $p_{ik} = p(\xi_i, \xi_k)$ (по поводу условия (3.1) см., например, [15]).

Предложим далее, что все состояния ξ_i являются существенными и образуют положительный класс (см. [5]).

В силу (3.1) этот класс состоит из одного подкласса. Пусть $f(\xi_i) = a + k_i h$, где k_i — целое число, a — произвольное действительное число и $h > 0$.

Теорема 3.1. *Если общий наибольший делитель k_i равен 1,*

$$\sum_i f^2(\xi_i)\, p_i < \infty$$

и

$$\sigma > 0 \tag{3.2}$$

(p_i — финальные вероятности, σ определяется так же, как в теореме 2.1), то равномерно относительно s

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\mathscr{P}_{\pi n}(s) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_{ns}^2}{2}}\right) = 0, \tag{3.3}$$

где

$$\mathscr{P}_{\pi n}(s) = \Pr\left(\sum_1^n f(x_i) = an + sh\right)$$

при условии, что начальным распределением служит $\pi_i = \pi(\xi_i)$ и

$$\sigma\sqrt{n}\, z_{ns} = a(n+1) + sh - (n+1)\sum_1^\infty f(\xi_i)\, p_i.$$

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1. *Если общий наибольший делитель k_i равен 1, то при $\varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant \frac{2\pi}{h} - \varepsilon$ и $n > n_0$*

$$|\varphi_{n\pi}(\theta)| < e^{-cn}, \tag{3.4}$$

где $\varphi_{n\pi}(\theta)$ — характеристическая функция случайной величины $\sum_1^n f(x_i)$ при условии, что начальным распределением служит $\pi_i = \pi(\xi_i)$, $c > 0$ — постоянная, зависящая от ε.

Доказательство. Обозначим $k_j - k_i$ через Δ_{ji}. Очевидно, общий наибольший делитель Δ_{ij} равен 1. Пусть S_k — множество тех Δ_{ji}, для которых $p_{kj} > 0$ и $p_{ki} > 0$. Нетрудно видеть, что общий наибольший делитель d чисел $\Delta_{is} \in \sum_1^\infty S_k$ равен 1. В самом деле, допустим, что $d > 1$. Тогда $p_{si} = 0$, если $k_i \neq a_s + m_i d$, где a_s и m — целые числа, зависящие соответственно от s и i. Если для некоторых k и i $a_k \not\equiv a_i \pmod d$, то неравенства $p_{kj} > 0$ и $p_{ij} > 0$ не могут выполняться одновременно, а это противоречит (3.1). Если же $a_k \equiv a_i \pmod d$ при любых i и k, то $p_{si} = 0$ для i таких, что $k_i \not\equiv a_1 \pmod d$ и всех s, но это, очевидно, невозможно.

Выберем в $\sum_1^\infty S_k$ конечное множество S так, чтобы общий наибольший делитель $\Delta_{ij} \in S$ был равен 1. Занумеруем каким-либо способом $\Delta_{ij} \in S$. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$ — получившаяся в результате последовательность. Если $\Delta_s \in S_{\mu(s)}$, то для некоторых $i(s)$ и $j(s)$ имеем

$p_{\mu(s)i(s)} > 0$ и $p_{\mu(s)j(s)} > 0$. Вследствие (3.1) найдется индекс $\nu(s)$ такой, что

$$p_{i(s)\nu(s)} > 0 \text{ и } p_{j(s)\nu(s)} > 0. \tag{3.5}$$

Обозначим $\sum_{s=1}^{\infty} p_{is} p_{sj} e^{i\theta(x_s + x_j)}$ через $p_{ij}^{(2)}(\theta)$.

В силу (3.5) при

$$\frac{2\pi k}{h\,|\Delta_s|} + \varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant \frac{2\pi(k+1)}{h\,|\Delta_s|} - \varepsilon$$

$$p_{\mu(s)\nu(s)}^{(2)} - |p_{\mu(s)\nu(s)}^{(2)}(\theta)| > \rho_s(\varepsilon) > 0, \tag{3.6}$$

где $\rho_s(\varepsilon)$ — постоянная, зависящая от s и ε.

Далее

$$\sum_j |p_{ij}^{(m+2)}(\theta)| \leqslant 1 - p_{i\mu(s)}^{(m)}(p_{\mu(s)\nu(s)}^{(2)} - |p_{\mu(s)\nu(s)}^{(2)}(\theta)|), \tag{3.7}$$

где $p_{ij}^{(m+2)}(\theta)$ — элемент матрицы $P^{m+2}(\theta)$ ($P(\theta)$ — характеристическая матрица $\{p_{ik}e^{i\theta x_k}\}$).

Не нарушая общности, мы можем полагать, что Δ_1 — наименьшая по абсолютной величине среди разностей $\Delta_s \in S$. Пусть $|\Delta_1| \neq 1$. Если $|\theta| = \frac{2\pi k}{h\,|\Delta_1|}$, $k < |\Delta_1|$, то всегда можно выбрать $j(k)$ и $\Delta_{i(k)} \in S$, так, что

$$\frac{2\pi j(k)}{h\,|\Delta_{i(k)}|} < |\theta| < \frac{2\pi(j(k)+1)}{h\,|\Delta_{i(k)}|}. \tag{3.8}$$

Действительно, в противном случае

$$\frac{j_i}{|\Delta_i|} = \frac{k}{|\Delta_1|}$$

для всех $\Delta_i \in S$, т. е. $\Delta_i = n_i\Delta_1$, где n_i — целое, а это противоречит тому, что общий наибольший делитель $\Delta_i \in S$ равен 1.

В силу (3.6) и (3.8) при $\varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant \frac{2\pi}{h} - \varepsilon$

$$\max_{s \leqslant N}(p_{\mu(s)\nu(s)}^{(2)} - |p_{\mu(s)\nu(s)}^{(2)}(\theta)|) > \rho(\varepsilon) > 0, \tag{3.9}$$

где $\rho(\varepsilon)$ — постоянная, зависящая от ε.

Из (3.7) и (3.9) следует

$$\max_i \sum_j |p_{ij}^{(m+2)}(\theta)| \leqslant 1 - \min_{s \leqslant N,\, i} p_{i\mu(s)}^{(m)} \rho(\varepsilon). \tag{3.10}$$

В силу (1.4), поскольку все финальные вероятности $p_i > 0$, можно выбрать m так, что

$$p_{i\mu(s)}^{(m)} > \alpha > 0 \tag{3.11}$$

для всех i и $s \leqslant N$.

С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$|\varphi_{n\pi}(\theta)| \leqslant \left(\max_i \sum_j |p_{ij}^{(m+2)}(\theta)|\right)^{\frac{n-1}{m+2}-1}. \tag{3.12}$$

Из (3.10—3.12) вытекает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 3.1. В доказательстве локальной предельной теоремы для независимых одинаково распределенных слу-

чайных величин по методу Б. В. Гнеденко основную роль играют следующие два неравенства:

$$|f_n(\theta)| < e^{-cn} \text{ при } \varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant \frac{2\pi}{h} - \varepsilon \tag{3.13}$$

и

$$\left|f_n\left(\frac{\theta}{B_n}\right)\right| < e^{-\frac{\theta^2}{4}} \text{ при } |\theta| < \varepsilon, \tag{3.14}$$

где $f_n(\theta)$ — характеристическая функция суммы первых n случайных величин, B_n^2 — дисперсия этой суммы и ε достаточно мало.

Неравенство (3.13), как показывает лемма 3.1, остается справедливым и в условиях теоремы 3.1. С другой стороны, как нетрудно видеть, из (3.7) следует, что

$$\left|\varphi_{n\tau}\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| < e^{-b^2\theta^2}, \tag{3.15}$$

где $b^2 > 0$ — некоторая постоянная.

Используя теорему (1.1) и неравенства (3.13) и (3.15) и проводя те же рассуждения, что и в случае независимых случайных величин (см. [14], § 49), мы легко получаем (3.3).

§ 2. Асимптотические разложения

Пусть

$$\int_X |f(\eta)|^{k-2+\delta} \pi(d\eta) < \infty, \quad \int_X |f(\eta)|^{k+\delta} p(\xi, d\eta) < M < \infty \tag{3.16}$$

для некоторого целого $k \geqslant 3$ и $\delta > 0$.

Разлагая $e^{i\theta\varepsilon(\eta)}$ в ряд, получаем

$$P(\theta) = P + i\theta P^{(1)} + \frac{(i\theta)^2}{2!} P^{(2)} + \ldots + \frac{(i\theta)^k}{k!} P^{(k)} + O(\theta^{k+\delta}), \tag{3.17}$$

где $P^{(s)}$ определяется ядром

$$i^{-s} \int_A \frac{d^s}{d\theta^s} e^{i\theta f(\eta)}\Big|_{\theta=0} p(\xi, d\eta).$$

Очевидно,

$$\|P^s\| \leqslant \sup_\xi \int_X |f(\eta)|^s p(\xi, d\eta).$$

Из (3.17) и (1.11) нетрудно вывести

$$R(z, \theta) = R(z) + \sum_1^k R^{(s)}(z)(i\theta)^s + O(\theta^{k+\delta}), \tag{3.18}$$

где $R^{(s)}(z)$ — комбинации из $R(z)$ и $P^{(j)}$, $j \leqslant s$.

Из (1.13) и (3.18) следует, что при $\|P(\theta) - P\| < \varepsilon$

$$P_1(\theta) = P_1 + \sum_1^k P_1^{(s)}(i\theta)^s + O(\theta^{k+\delta}).$$

$$\lambda(\theta) = 1 + \sum_{1}^{k} \lambda^{(s)} (i\theta)^s + O(\theta^{k+\delta}), \tag{3.19}$$

где

$$P_1^{(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_1} R^{(s)}(z)\, dz,$$

а $\lambda^{(s)}$ — комбинации из $(P_1^{(j)}\psi,\ p)$ и $\int_{I_1} z\,(R^{(j)}\psi,\ p)\, dz$, $j \leqslant s$.

Далее

$$\ln \lambda(\theta) = \sum_{1}^{k} \alpha^{(s)} (i\theta)^s + O(\theta^{k+\delta}), \tag{3.20}$$

где $\alpha^{(s)}$ — комбинации из $\lambda^{(j)}$, $j \leqslant s$.

В дальнейшем мы будем полагать, что

$$\alpha^{(1)} = \lambda^{(1)}(0) = 0.$$

Нетрудно видеть, что

$$\ln \varphi_{n\pi}\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right) = n \ln \lambda\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right) + \ln\left(P_1\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)\psi,\ \pi\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\theta^2}{2} + n \sum_{3}^{k} \left(\alpha^{(s)} + \beta^{(s-2)}\right)\left(\frac{i\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{s-2} + O\left(\frac{\theta^{k-2+\delta}}{n^{\frac{k-2+\delta}{2}}}\right) + O(\theta\rho_2^n), \tag{3.21}$$

где $\varphi_{n\pi}(\theta)$ — характеристическая функция $\sum_{1}^{n+1} f(x_k)$, $\pi(\theta)$ — вполне аддитивная функция множества $\int_A e^{i\theta f(\eta)} \pi(d\eta)$, $\beta^{(s)}$ — коэффициенты в разложении $\ln(P_1(\theta)\psi,\ \pi(\theta))$ по степеням $(i\theta)^s$.

Разложению (3.21) формально соответствует разложение для $\varphi_{n\pi}\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)$

$$e^{-\frac{\theta^2}{2}}\left(1 + \sum_{1}^{\infty} P_{s\pi}(i\theta)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^s\right), \tag{3.22}$$

где $P_{s\pi}(\theta)$ — некоторые полиномы степени $3s$, коэффициенты которых зависят от начального распределения $\pi(\cdot)$.

Лемма 3.2. *Если* $|\theta| < \sqrt{n}\Delta_1$ (Δ_1 — *некоторая постоянная*), *то*

$$\left|\varphi_{n\pi}\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{\theta^2}{2}}\left(1 + \sum_{1}^{k-2} P_{s\pi}(i\theta)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^s\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c(k)}{(\sqrt{n})^{k-2}}\delta(n)\left(|\theta|^k + |\theta|^{3(k-2)}\right) e^{-\frac{\theta^2}{4}} + O(\theta\rho_2^n), \tag{3.23}$$

где $c(k)$ — *постоянная, зависящая от* k, *и* $\lim_{n\to\infty} \delta(n) = 0$.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 1 § 41 монографии [14].

Теорема 3.2. *Если выполнены условия теоремы* (3.1) *и условие* (3.16), *то*

$$\mathscr{P}_{\pi(n+1)}(s) = \frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\left\{\varphi(z_{ns}) + \sum_{1}^{k-2} \frac{1}{n^{\frac{m}{2}}} P_{\pi m}(-\varphi(z_{ns}))\right\} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{k-1}{2}}}\right).$$

Здесь $\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ *и* $P_{\pi m}(-\varphi)$ *вычисляются, как* $P_{\pi m}(-u)$ *с заменой* u^r *на* $\varphi^{(r)}$.

Эта теорема доказывается так же, как и аналогичное предложение для независимых случайных величин ([14], § 51, теорема 1). При этом используются леммы 3.1 и 3.2.

Теорема 3.3. *Пусть* X *— числовая прямая. Если выполнено условие* (3.16),

$$0<m<p_0(\xi,\ \eta)<M<\infty,\ \eta\in C,\ \xi\in X, \tag{3.24}$$

где $p_0(\xi,\ \eta)$ *— плотность абсолютно непрерывной относительно меры Лебега компоненты функции* $p(\xi,\ A)$, $C\in F_X$, $\operatorname{mes} C>0$ (*имеется в виду мера Лебега*) *и*

$$\liminf_{\theta\to\infty}\iint\limits_{C\,C}\sin^2(f(\xi)-f(\eta))\,\theta\,d\eta\,d\xi>0, \tag{3.25}$$

то

$$F_{n\pi}(x)-\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_1^{k-2}\frac{Q_{s\pi}(x)}{(\sqrt{n})^s}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}}\right). \tag{3.26}$$

Здесь $F_{n\pi}(x)$ *— функция распределения* $\frac{\sum_1^n f(x_k)}{\sigma\sqrt{n}}$ *при условии, что начальным распределением служит* $\pi(\cdot)$,

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}Q_{s\pi}(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}=P_{s\pi}(-\Phi),$$

где $P_{s\pi}(-\Phi)$ *вычисляются как* $P_s(-u)$ с *заменой* u^r *на* $\Phi^{(r)}$.

Доказательство. Пусть $\mu(\xi,\cdot)$ сингулярная компонента $p(\xi,\cdot)$. Нетрудно видеть, что

$$p^{(2)}(\theta,\ \xi,\ A)=\int_A d\zeta\int_X e^{i\theta(f(\eta)+f(\zeta))}p_0(\xi,\ \eta)\,p_0(\eta,\ \zeta)\,d\eta+\mu^{(2)}(\theta,\ \xi,\ A),$$

где $p^{(2)}(\theta,\ \xi,\ A)$ — ядро оператора $P^2(\theta)$,

$$\mu^{(2)}(\theta,\ \xi,\ A)=\int_A d\zeta\int_X e^{i\theta(f(\eta)+f(\zeta))}p_0(\eta,\ \zeta)\,\mu(\xi,\ d\eta)+$$

$$+\int_X d\eta\int_A e^{i\theta(f(\eta)+f(\zeta))}p_0(\xi,\ \eta)\,\mu(\eta,\ d\zeta)+\int_X e^{i\theta f(\eta)}\mu(\xi,\ d\eta)\int_A e^{i\theta f(\zeta)}\mu(\eta,\ d\zeta).$$

Следовательно,

$$\|p^{(2)}(\theta,\ \xi,\ A)\|\leqslant 1-\int_X d\zeta\left\{\int_X p_0(\xi,\ \eta)\,p_0(\eta,\ \zeta)\,d\eta-\left|\int_X p_0(\xi,\ \eta)\,p_0(\eta,\ \zeta)\,e^{i\theta f(\eta)}d\eta\right|\right\}. \tag{3.27}$$

Далее

$$\left|\int_X e^{i\theta f(\eta)} p_0(\xi,\ \eta)\, p_0(\eta,\zeta)\, d\eta\right|^2 = \iint_{XX} p_0(\xi,\ \eta)\, p_0(\eta,\ \zeta) \times$$
$$\times\, p_0(\xi,\ \lambda)\, p_0(\lambda,\ \zeta) \cos\theta\,(f(\eta) - f(\zeta))\, d\eta\, d\lambda.$$

Отсюда вследствие (3.24)

$$\left(\int_X p_0(\xi,\ \eta)\, p_0(\eta,\ \zeta)\, d\eta\right)^2 - \left|\int_X e^{i\theta f(\eta)} p_0(\xi,\ \eta)\, p_0(\eta,\ \zeta)\, d\eta\right|^2 =$$
$$= 2\iint_{XX} p_0(\xi,\ \eta)\, p_0(\eta,\zeta)\, p_0(\xi,\ \lambda)\, p_0(\lambda,\ \zeta) \sin^2\frac{\theta}{2}\,(f(\eta) - f(\lambda))\, d\eta\, d\lambda \geqslant$$
$$\geqslant 2m^4 \iint_{CC} \sin^2\frac{\theta}{2}\,(f(\eta) - f(\lambda))\, d\eta\, d\lambda. \tag{3.28}$$

С другой стороны, для $\zeta \in C$

$$\left|\int_X e^{i\theta f(\eta)} p_0(\xi,\ \eta)\, p_0(\eta,\ \zeta)\, d\eta\right| + \int_X p_0(\xi,\ \eta)\, p_0(\eta,\ \zeta)\, d\eta \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_X p_0(\xi,\ \eta)\, p_0(\eta,\ \zeta)\, d\eta < 2M. \tag{3.29}$$

Из (3.28) и (3.29) следует, что

$$\int_X p_0(\xi,\ \eta)\, p_0(\eta,\ \zeta)\, d\eta - \left|\int_X p_0(\xi,\ \eta)\, p_0(\eta,\ \zeta)\, e^{i\theta f(\eta)}\, d\eta\right| >$$
$$> \frac{m^4}{M}\iint_{CC} \sin^2\frac{\theta}{2}\,(f(\eta) - f(\lambda))\, d\eta\, d\lambda \tag{3.30}$$

для $\zeta \in C$.

Отсюда

$$\int_X d\zeta \left\{\int_X p_0(\xi,\ \eta)\, p_0(\eta,\ \zeta)\, d\eta - \left|\int_X e^{i\theta f(\eta)} p_0(\xi,\ \eta)\, p_0(\eta,\ \zeta)\, d\eta\right|\right\} >$$
$$> \frac{m^4}{M}\,\mathrm{mes}\, C \iint_{CC} \sin^2\frac{\theta}{2}\,(f(\eta) - f(\lambda))\, d\eta\, d\lambda.$$

Из (3.25) (3.27), и (3.28) вытекает, что

$$\|p^{(2)}(\theta,\ \xi,\ A)\| < 1 - \alpha,\ \xi \in X,\ |\theta| > \Delta_1,$$

где $\alpha > 0$ некоторая постоянная, т. е.

$$\|P^2(\theta)\| < 1 - \alpha$$

для $|\theta| \geq \Delta_1$.

Остальная часть доказательства проводится совершенно так же, как доказательство теоремы § 45 в [14]. При этом используется лемма 3.2.

Поступила в редакцию
25. 6. 57

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Марков, Распространение предельных теорем теории вероятностей на сумму величин, связанных в цепь, Зап. Акад. наук по Физико-математическому отделению, VIII серия, 22, № 9.

[2] Maurice Frechet, Recherches, théoriques modernes sur le calcul pro-

babilités. II. Méthodes des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles, Paris, 1938.
[3] W. Doeblin, Eléments d'une théorie générale des chaînes simple constantes de Markoff, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (3), 37 (1940), 61—111.
[4] W. Doeblin, Sur deux problèmes de M. Kolmogoroff concernant les chaînes dénombrables, Bull. Soc. Math. France, 66 (1938), 210—220.
[5] А. Н. Колмогоров, Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний, Бюл. МГУ, 1, № 3 (1937), 1—16.
[6] А. Я. Хинчин, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, ГОНТИ, 1938.
[7] O. Onicescu et G. Mihoc, L'application de la notion de fonction caractéristique dans la théorie des chaînes de Markoff, Premier Mémoir (cas discontinu). Mathematica Cluj, 1938.
[8] O. Onicescu et G. Mihoc, Sur les sommes de variables enchaînées, Second mémoire, Bull. math. Soc. Roum., 41 (1939), 99—116.
[9] А. Н. Колмогоров, Локальная предельная теорема для однородных цепей Маркова, Изв. АН СССР, сер. матем., 13 (1950), 287—300.
[10] С. Х. Сираждинов, Уточнение предельных теорем для цепей Маркова, ДАН СССР, 84, 6 (1952), 1143—1146.
[11] Е. Б. Дынкин, О некоторых предельных теоремах для цепей Маркова, Украин. матем. журн., 6, № 1 (1954), 21—27.
[12] J. L. Doob, Stochastic processes, New-York, 1953.
[13] W. Feller, Fluctuation Theory of Recurrent Events, Trans. Amer. Math. Soc., 67 (1949), 98—119.
[14] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949.
[15] Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, Теория вероятн. и ее применения, 1, 1 (1956), 72—89.
[16] Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ГИИЛ, М., 1954.

SOME LIMIT THEOREMS FOR STATIONARY MARKOV CHAINS

S. V. NAGAEV (TASHKENT)

(Summary)

Let X be a space of points, F_X a σ-algebra of its subsets, and $p(\xi, A)$, $\xi \in X$, $A \in F_X$, a stochastic transition function satisfying the following condition:

an integer $k \geqslant 1$ exists such that

$$\sup_{\eta, \xi \in X, A \in F_X} | p^{(k)}(\xi, A) - p^{(k)}(\eta, A) | < 1. \quad (1)$$

Let us define the sequence of random variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ as follows:

$$\Pr(x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n) = \int_{A_1} \pi(d\xi_1) \int_{A_2} p(\xi_1, d\xi_2) \ldots \int_{A_n} p(\xi_{n-1}, d\xi_n),$$

where $\pi(\cdot)$ — is the initial distribution.

Let $f(\xi)$ be a real function of $\xi \in X$ measurable with respect to F_X.

In chapter I the asymptotic behaviour of the characteristic function of $\sum_1^n f(x_i)$ is studied. Chapter II is devoted to limit theorems. The central limit theorem is proved under the assumption that

$$\int_X f^2(\xi)\, p(d\xi) < \infty, \quad (2)$$

where $p(\cdot)$ is a stationary absolute probability distribution corresponding to $p(\cdot, \cdot)$. The sufficient conditions for convergence to stable laws are given. In chapter II the local limit theorem is proved, and asymptotic expansions are given. The characteristic function method is the basic one used.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1957

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ МЕР, СООТВЕТСТВУЮЩИХ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССАМ

I. ПРОЦЕССЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

А. В. СКОРОХОД

Введение

Если на борелевском теле $\mathfrak{B}$ множеств из некоторого пространства X заданы две меры μ_1 и μ_2, то принято говорить, что мера μ_2 абсолютно непрерывна относительно меры μ_1, если для всякого множества $A \in \mathfrak{B}$, для которого $\mu_1(A) = 0$, также и $\mu_2(A) = 0$. Известная теорема Радона—Никодима (см., например, [1], стр. 59) утверждает, что для всякой меры μ_2, абсолютно непрерывной относительно меры μ_1, существует измеримая относительно $\mathfrak{B}$ функция $p(x)$, такая что

$$\mu_2(A) = \int_A p(x)\,\mu_1(dx). \tag{1}$$

Если для меры μ_2 выполнено (1), то еще говорят, что мера μ_2 дифференцируема по мере μ_1, и пишут

$$p(x) = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x), \tag{2}$$

а функцию $p(x)$ называют производной меры μ_2 по мере μ_1, либо плотностью меры μ_2 относительно меры μ_1.

Каждому случайному процессу $\xi(t)$ соответствует по теореме Колмогорова (см. [2] стр. 39) мера, определенная на минимальном борелевском теле γ подмножеств пространства всех функций $\mathfrak{F}$, содержащем все цилиндрические множества, т. е. множества всех функций, принимающих в точках $t_1, t_2, \ldots, t_k$ значения, принадлежащие борелевским множествам $A_1, A_2, \ldots, A_k$ того пространства, где происходит процесс. Эту меру, соответствующую процессу $\xi(t)$ мы будем обозначать $\mu_{\xi(t)}(\mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A}$ некоторое множество из γ.

Настоящая работа посвящена исследованию условий, при которых для двух данных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ мера $\mu_{\xi_2(t)}$ будет абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\xi_1(t)}$ и вычисляется плотность меры $\mu_{\xi_2(t)}$ относительно меры $\mu_{\xi_1(t)}$.

Вопрос об абсолютной непрерывности $\mu_{\xi_2(t)}$ относительно $\mu_{\xi_1(t)}$ представляет интерес ввиду той роли, которую играют в теории случайных процессов множества, имеющие вероятность 1 — «свойства процесса, выполняющиеся с вероятностью 1». Если мы докажем, что $\mu_{\xi_2(t)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\xi_1(t)}$, мы немедленно можем утверждать, что все свойства, выполняющиеся с вероятностью 1 для процесса $\xi_1(t)$, будут также выполняться с вероятностью 1 и для процесса $\xi_2(t)$. Если мы, кроме того, будем знать $\frac{d\mu_{\xi_2(t)}}{d\mu_{\xi_1(t)}}$, то сможем свести изучение распределения функционалов на траекториях процесса $\xi_2(t)$ к изучению распределения функционалов на траекториях процесса $\xi_1(t)$, ввиду очевидного соотношения:

$$\mathbf{E}e^{izF(\xi_2(t))} = \int_{\mathfrak{F}} e^{izF(x(t))}\, d\mu_{\xi_2(t)}(x(t)) = \int_{\mathfrak{F}} e^{izF(x(t))} \frac{d\mu_{\xi_2(t)}}{d\mu_{\xi_1(t)}}(x(t))\, d\mu_{\xi_1(t)}(x(t)). \quad (3)$$

Подобные рассмотрения для некоторых частных случаев содержатся, например, в [3]. Единственный общий результат, известный до сих пор автору, заключается в том, что мера, соответствующая диффузионному процессу с коэффициентом диффузии, равным 1, и коэффициентом переноса $\gamma(x,\ t)$, при некоторых предположениях о гладкости $\gamma(x,\ t)$, будет абсолютно непрерывна относительно меры, соответствующей винеровскому процессу. Доказательство этого предложения можно найти в [4], дополнение 2.

Предлагаемая работа состоит из двух частей. В первой части находятся необходимые и достаточные условия для абсолютной непрерывности $\mu_{\xi_2(t)}$ относительно $\mu_{\xi_1(t)}$ и вычисляется $\frac{d\mu_{\xi_2(t)}}{\mu d_{\xi_1(t)}}$ в том случае, когда $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — стохастически непрерывные процессы с независимыми приращениями. Во второй части, которая будет печататься в этом же журнале, будут рассмотрены те же вопросы для марковских процессов.

Мы будем рассматривать процессы, определенные для $t \in [0,1]$ и принимающие значения из m-мерного эвклидова пространства $R^{(m)}$. Множество всех функций * $x(t)$, определенных на $[0,1]$ и принимающих значения из $R^{(m)}$, мы будем обозначать $\mathfrak{F}^{(m)}$; минимальное борелевское тело множеств из $\mathfrak{F}^{(m)}$, содержащее все цилиндрические множества, через $\gamma^{(m)}$.

В этой части работы будет использоваться следующая теорема, легко выводящаяся из общих предельных теорем для сумм независимых числовых слагаемых (см. [5], § 25):

Теорема. *Если для последовательности серий, независимых в каждой серии случайных величин* $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,n}$, *существуют такие: мера* $\widetilde{P}(A)$ *в* $R^{(m)}$, *конечная для любого множества, не содержащего некоторой окрестности нуля, вектор* a *из* $R^{(m)}$ *и симметричное неотрицательное*

* Поскольку для стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями $\xi(t)$ можно считать, что $\xi(t)$ с вероятностью 1 принадлежит пространству функций, не имеющих разрывов второго рода (см. Дуб, Вероятностные процессы. ИИЛ, 1956 г., стр. 379), мы будем иногда понимать под $\mathfrak{F}^{(m)}$ это пространство.

линейное преобразование A пространства $R^{(m)}$, что 1) $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\{x_{n,j} \in A\} \to \widetilde{P}(A)$, *если A лежит вне некоторой окрестности нуля и* $\widetilde{P}(\bar{A} \cap \overline{R^{(m)} \setminus A}) = 0$ *($\bar{A}$ — замыкание A),*

2) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{u \in R^{(m)},\ (u,u) \leqslant 1} u\, \mathbf{P}\{x_{n,j} \in du\} = a;$$

3) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{j=1}^{n} \left[\int\limits_{(u,u)\leqslant\varepsilon} (z,u)^2\, \mathbf{P}\{x_{n,j} \in du\} - \left(\int\limits_{(u,u)\leqslant\varepsilon} (z,u)\, \mathbf{P}\{x_{n,j} \in du\} \right)^2 \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{j=1}^{n} \left[\int\limits_{(u,u)\leqslant\varepsilon} (z,u)^2\, \mathbf{P}\{x_{n,j} \in du\} - \left(\int\limits_{(u,u)\leqslant\varepsilon} (z,u)\, \mathbf{P}\{x_{n,j} \in du\} \right)^2 \right] =$$

$$= (Az, z),$$

((a, b) обозначает скалярное произведение), то для $\sum_{j=1}^{n} x_{n,j}$ *существует предельное распределение* Π, *характеристическая функция которого задается формулой:*

$$\int e^{i(z,u)}\, \Pi(du) = \exp\left\{ i(z,a) - \frac{1}{2}(Az,z) + \int\limits_{(u,u)\leqslant 1} (e^{i(z,u)} - 1 - i(z,u))\, \widetilde{P}(du) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(u,u)>1} (e^{i(z,u)} - 1)\, \widetilde{P}(du) \right\}. \qquad (4)$$

§ 1. Некоторые общие замечания относительно абсолютно непрерывных мер

При доказательстве теорем об абсолютной непрерывности мер основную роль будут играть следующие вспомогательные предложения.

1.1. **Лемма.** *Пусть на борелевском теле $\mathfrak{B}$ подмножеств X, содержащем в качестве элемента само X, заданы меры $\mu_1^{(j)}$ и $\mu_2^{(j)}$ $j = 1, 2, \ldots$ причем $\mu_2^{(j)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_1^{(j)}$ для всех j и $\sum_j \mu_1^{(j)}(X) < \infty$, $\sum \mu_2^{(j)}(X) < \infty$. Тогда мера $\mu_2 = \sum_j \mu_2^{(j)}$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu_1 = \sum_j \mu_1^{(j)}$.*

Справедливость утверждения леммы следует из того, что $\mu_1(A) = 0$ лишь тогда, когда $\mu_1^{(j)}(A) = 0$ для всех j, а значит и $\mu_2^{(j)}(A) = 0$, а с ними и $\mu_2(A) = 0$.

1.2. **Лемма.** *Пусть конечномерные распределения процессов $\xi_1^{(n)}(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi_1(t)$ и конечномерные распределения $\xi_2^{(n)}(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса*

$\xi_2(t)$, *причем* $\mu_{\xi_2^{(n)}(t)}$ *абсолютно непрерывна относительно* $\mu_{\xi_1^{(n)}(t)}$ *и*

$$\mathbf{E}\left(\frac{d\mu_{\xi_2^{(n)}(t)}}{d\mu_{\xi_1^{(n)}(t)}}(\xi_1^{(n)}(t))\right)^2 \leqslant L^2. \tag{1.1}$$

Тогда $\mu_{\zeta_2(t)}$ *абсолютно непрерывна относительно* $\mu_{\xi_1(t)}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{c}$ обозначает цилиндрическое множество, для которого $x(t) \in \mathfrak{c}$, если

$$x(t_1) \in A_1, \quad x(t_2) \in A_2, \ldots, \quad x(t_k) \in A_k,$$

где A_1, A_2,..., A_k некоторые борелевские множества, такие что

$$\mathbf{P}\{\xi_1(t_i) \in \bar{A}_i \cap R^{(m)} \setminus A_i\} = \mathbf{P}\{\xi_2(t_i) \in \bar{A}_i \cap R^{(m)} \setminus A_i\} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{1.2}$$

Тогда из сходимости конечномерных распределений следует, что

$$\mu_{\xi_2^{(n)}(t)}(\mathfrak{c}) \to \mu_{\xi_2(t)}(\mathfrak{c}),$$

$$\mu_{\xi_1^{(n)}(t)}(\mathfrak{c}) \to \mu_{\xi_1(t)}(\mathfrak{c}).$$

Но для любого n

$$\mu_{\xi_2^{(n)}(t)}(\mathfrak{c}) = \int_{\mathfrak{c}} \frac{d\mu_{\xi_2^{(n)}(t)}}{d\mu_{\xi_1^{(n)}(t)}}(x(t))\, d\mu_{\xi_1^{(n)}(t)}(x(t)) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_{\mathfrak{c}} d\mu_{\xi_1^{(n)}(t)}(x(t))} \cdot \sqrt{\int_{\mathfrak{c}} \left(\frac{d\mu_{\xi_2^{(n)}(t)}}{d\mu_{\xi_1^{(n)}(t)}} x(t)\right)^2 d\mu_{\xi_1^{(n)}(t)}(x(t))} \leqslant$$

$$\leqslant L \cdot \sqrt{\mu_{\xi_1^{(n)}(t)}(\mathfrak{c})},$$

а значит и

$$\mu_{\xi_2(t)}(\mathfrak{c}) \leqslant L \sqrt{\mu_{\xi_1(t)}(\mathfrak{c})}. \tag{1.3}$$

Отсюда легко вывести, что для любого $\mathfrak{A}$ и $\gamma^{(m)}$

$$\mu_{\xi_2(t)}(\mathfrak{A}) \leqslant L \sqrt{\mu_{\xi_1(t)}(\mathfrak{A})}. \tag{1.4}$$

Значит, действительно, $\mu_{\xi_2(t)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\xi_1(t)}$.

1.3. **Лемма**. *Пусть* $\mu_{\xi_2^*(t)}$ *абсолютно непрерывна относительно* $\mu_{\xi_1^*(t)}$ *и* $\mu_{\xi_2^{**}(t)}$ *абсолютно непрерывна относительно меры* $\mu_{\xi_1^{**}(t)}$. *Тогда, если* $\xi_1^*(t)$ *и* $\xi_1^{**}(t)$ *независимы, а также* $\xi_2^*(t)$ *и* $\xi_2^{**}(t)$ *независимы, то* $\mu_{\xi_2(t)}$ *абсолютно непрерывна относительно* $\mu_{\xi_1(t)}$, *где* $\xi_2(t) = \xi_2^*(t) + \xi_2^{**}(t)$ *и* $\xi_1(t) = \xi_1^*(t) + \xi_1^{**}(t)$.

Доказательство. Рассмотрим процессы в $R^{(2m)}$: $\zeta_1(t) = [\xi_1^*(t); \xi_2^{**}(t)]$ и $\zeta_2(t) = [\xi_2^*(t); \xi_1^*(t)]$ (пару величин из $R^{(m)}$ можно рассматривать как одну величину из $R^{(2m)}$). Если $x^*(t)$ и $x^{**}(t)$ обозначают некоторые

функции из $\mathfrak{F}^{(m)}$, а $[x^*(t);\ x^{**}(t)]$ соответствующая функция из $\mathfrak{F}^{(2m)}$, то

$$\frac{d\mu_{\zeta_2(t)}}{d\mu_{\zeta_1(t)}}[x^*(t);\ x^{**}(t)] = \frac{d\mu_{\xi_2^*(t)}}{d\mu_{\xi_1^*(t)}}(x^*(t)) \cdot \frac{d\mu_{\xi_2^{**}(t)}}{d\mu_{\xi_1^{**}(t)}}(x^{**}(t)), \tag{1.5}$$

т. е. $\mu_{\zeta_2(t)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\zeta_1(t)}$. Тем более $\mu_{\xi_2(t)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\xi_1(t)}$, так как если для некоторого $\mathfrak{A}$, $\mu_{\xi_1(t)}(\mathfrak{A}) = 0$, то и $\mu_{\zeta_1(t)}(\mathfrak{A}^{(2m)}) = 0$, где $\mathfrak{A}^{(2m)}$ такое множество в $\mathfrak{F}^{(2m)}$, что $x^*(t) + x^{**}(t) \in \mathfrak{A}$ для каждого $[x^*(t);\ x^{**}(t)] \in \mathfrak{A}^{(2m)}$. Но тогда и $\mu_{\zeta_2(t)}(\mathfrak{A}^{(2m)}) = 0$, а значит и $\mu_{\xi_2(t)}(\mathfrak{A}) = 0$.

1.4. **Лемма.** *Пусть имеются два процесса* $\xi_1(t)$ *и* $\xi_2(t)$, *причем* $\mu_{\xi_2(t)}$ *абсолютно непрерывна относительно* $\mu_{\xi_1(t)}$. *Пусть далее* $T_n(x(t), \tau)$ *последовательность отображений* $\mathfrak{F}^{(m)}$ *в* $\mathfrak{F}^{(m')}$, *переводящих множества из* $\gamma^{(m)}$ *во множества из* $\gamma^{(m')}$. *Если* $T_n(\xi_1, (t), \tau)$ *при* $n \to \infty$ *сходится по вероятности к некоторой величине* $T(\xi_1(t), \tau)$, *то* $T_n(\xi_2(t), \tau)$ *будет также сходиться по вероятности к некоторой величине* $T(\xi_2(t), \tau)$, *и если* $\mu_{T\xi_1(t)}$ *и* $\mu_{T\xi_2(t)}$ *обозначают меры в* $\mathfrak{F}^{(m')}$, *соответствующие процессам* $T(\xi_1(t), \tau)$ *и* $T(\xi_2(t), \tau)$, *то* $\mu_{T\xi_2(t)}$ *абсолютно непрерывна относительно* $\mu_{T\xi_1(t)}$.

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{H}^{(N)}$ множество тех $x(t)$, для которых

$$N - 1 \leqslant \frac{d\mu_{\xi_2(t)}}{d\mu_{\xi_1(t)}}(x(t)) < N.$$

Рассмотрим процессы $\xi_2^N(t)$ и $\xi_1^N(t)$, определенные для всех N, для которых $\mu_{\xi_1(t)}(\mathfrak{H}^{(N)}) \neq 0$, а меры, соответствующие этим процессам в $\mathfrak{F}^{(m)}$, задаются формулами:

$$\mu_{\xi_1^N(t)}(\mathfrak{A}) = \frac{\mu_{\xi_1(t)}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}^{(N)})}{\mu_{\xi_1(t)}(\mathfrak{H}^{(N)})}, \tag{1.6}$$

$$\mu_{\xi_2^N(t)}(\mathfrak{A}) = \frac{\mu_{\xi_2(t)}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}^{(N)})}{\mu_{\xi_2(t)}(\mathfrak{H}^{(N)})}. \tag{1.7}$$

Очевидно, что

$$\frac{d\mu_{\xi_2^N(t)}}{d\mu_{\xi_1^N(t)}}(x(t)) < N.$$

Легко видеть, что для $T_n(\xi_1^N(t), \tau)$ существует предел по вероятности $T(\xi_1^N(t), \tau)$. А так как $\dfrac{d\mu_{\xi_2^N(t)}}{d\mu_{\xi_1^N(t)}} \leqslant N$, то

$$\mathbf{P}\{|T_n(\xi_2^N(t), \tau) - T_{n'}(\xi_2^N(t), \tau)| > \varepsilon\} \leqslant N\mathbf{P}\{|T_n(\xi_1^N(t), \tau) - T_{n'}(\xi_1^N(t), \tau)| > \varepsilon\}.$$

Значит существует также предел по вероятности для последовательности величин $T_n(\xi_n^N(t), \tau)$, равный $T(\xi_2^N(t), \tau)$. Но

$$\mathbf{P}\{|T_n(\xi_2(t), \tau) - T_{n'}(\xi_2(t), \tau)| > \varepsilon\} =$$
$$= \sum_N \mathbf{P}\{|T_n(\xi_2^N(t), \tau) - T_{n'}(\xi_2^N(t), \tau)| > \varepsilon\}\, \mu_{\xi_2(t)}(\mathfrak{H}^{(N)}).$$

Поэтому последовательность $T_n(\xi_2(t), \tau)$ также сходится по вероятности к некоторой величине $T(\xi_2(t), \tau)$ причем $\mu_{T\xi_2(t)} = \sum_N \mu_{T\xi_2^N(t)} \cdot \mu_{\xi_2(t)}(\mathfrak{H}^{(N)})$. Так как $\frac{d\mu_{T_n\xi_2^N(t)}}{d\mu_{T_n\xi_1^N(t)}} \leqslant N$, то для последовательности $T_n(\xi_2^N(t), \tau)$ выполнено условие 1.2, так что $T(\xi_2^N(t), \tau)$ абсолютно непрерывна относительно $T(\xi_1^N(t), \tau)$. Поскольку

$$\mu_{T\xi_1(t)} = \sum_N \mu_{T\xi_1^N(t)} \cdot \mu_{\xi_1(t)}(\mathfrak{H}^{(N)}),$$

то для доказательства леммы остается применить 1.1.

При вычислении плотности меры $\mu_{\xi_2(t)}$ относительно меры $\mu_{\xi_1(t)}$ мы будем обычно поступать следующим образом:

Так как $\frac{d\mu_{\xi_2(t)}}{d\mu_{\xi_1(t)}}$ определена почти всюду по мере $\mu_{\xi_1(t)}$, то имеет смысл случайная величина

$$\frac{d\mu_{\xi_2(t)}}{d\mu_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t)).$$

Для задания этой величины достаточно задать совместные распределения $\xi_1(t)$ и $\frac{d\mu_{\xi_2(t)}}{d\mu_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t))$. В том случае, когда $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ либо процессы с независимыми приращениями, либо марковские процессы, довольно удобным представляется следующий способ задания совместных распределений $\xi_1(t)$ и $\frac{d\mu_{\xi_2(t)}}{d\mu_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t))$: рассмотрим меры $\mu^\tau_{\xi_1(t)}$ и $\mu^\tau_{\xi_2(t)}$, соответствующие процессам $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, рассматриваемым лишь на отрезке $[0, \tau]$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Если $\mu_{\xi_2(t)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\xi_1(t)}$, то и $\mu^\tau_{\xi_2(t)}$ будет абсолютно непрерывна относительно $\mu^\tau_{\xi_1(t)}$.

Обозначим

$$p(\tau, x(t)) = \frac{d\mu^\tau_{\xi_2(t)}}{d\mu^\tau_{\xi_1(t)}}(x(t))$$

и предположим, что $p(\tau, \xi_1(t)) > 0$ с вероятностью 1. Рассмотрим процессы в $m+1$-мерном пространстве $\zeta(t)$, задаваемый парой:

$$\zeta(\tau) = [\log p(\tau, \xi_1(t)); \xi_1(\tau)].$$

Оказывается, что $\zeta(\tau)$ будет процессом с независимыми приращениями, если $\xi_1(t)$ и $\xi_1(t)$ — процессы с независимыми приращениями, и $\zeta(\tau)$ будет процессом Маркова, если $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ процессы Маркова. В этом случае конечномерные распределения процесса $\zeta(t)$ могут быть заданы, если заданы инфинитезимальные характеристики процесса. К этому мы и будем всюду стремиться. При осуществлении этой программы полезно будет следующее предложение:

1.5. **Лемма**. *Пусть конечномерные распределения процессов* $\xi_1^{(n)}(t)$ *сходятся к конечномерным распределениям процесса* $\xi_1(t)$, *а конечномер-*

ные распределения $\xi_2^{(n)}(t)$ *сходятся к конечномерным распределениям* $\xi_2(t)$, *причем* $\mu_{\xi_2^{(n)}(t)}$ *абсолютно непрерывна относительно* $\mu_{\xi_1^{(n)}(t)}$, *а* $\mu_{\xi_2(t)}$ *абсолютно непрерывна относительно* $\mu_{\xi_1(t)}$. *Тогда, если конечномерные распределения процессов*

$$\zeta_n(\tau) = \left[\log \frac{d\mu^{\tau}_{\xi_2^{(n)}(t)}}{d\mu^{\tau}_{\xi_1^{(n)}(t)}} (\xi_1^{(n)}(t)); \ \xi_1^{(n)}(\tau) \right]$$

сходятся к конечномерным распределениям некоторого процесса $\bar{\zeta}(\tau)$, *то конечномерные распределения* $\bar{\zeta}(\tau)$ *и* $\zeta(\tau) = \left[\log \frac{d\mu^{\tau}_{\xi_2(t)}}{d\mu^{\tau}_{\xi_1(t)}} (\xi_1(t)); \ \xi_1(\tau) \right]$ *совпадают.*

Доказательство. Очевидно, если $\zeta(t) = [\chi(t); \ \bar{\xi}_1(t)]$, то распределения $\xi_1(t)$ и $\bar{\xi}_1(t)$ совпадают. Легко также убедиться, что

$$\chi(\tau) = \bar{p}^{\tau}(\bar{\xi}_1(t)),$$

где $\bar{p}^{\tau}(x(t))$—некоторый измеримый функционал. Нам остается лишь показать, что процесс $\bar{\xi}_2(t)$, конечномерные распределения которого определяются по формуле

$$\mathbf{P}\{\bar{\xi}_2(t) \in c\} = \mathbf{E}_{\{\bar{\xi}_1 \in c\}} \exp(\bar{p}^1(\xi_1(t)))$$

(c — некоторое цилиндрическое множество, а $\mathbf{E}_{\{S\}}$ обозначает условное математическое ожидание при условии $\{S\}$), будет иметь те же конечномерные распределения, что и процесс $\xi_2(t)$. Это же следует из того, что

$$\mathbf{P}\{\xi_2^{(n)}(t) \in c\} = \mathbf{E}_{\{\xi_1^{(n)}(t) \in c\}} \left(\frac{d\mu_{\xi_2^{(n)}(t)}}{d\mu_{\xi_1^{(n)}(t)}} (\xi_1^{(n)}(t)) \right),$$

и

$$\mathbf{E}_{\{\bar{\xi}_1^{(n)}(t) \in c\}} \left(\frac{d\mu_{\xi_2^{(n)}(t)}}{d\mu_{\xi_1^{(n)}(t)}} (\xi_1^{(n)}(t)) \right) \to \mathbf{P}\{\bar{\xi}_2(t) \in c\},$$

а

$$\mathbf{P}\{\xi_2^{(n)}(t) \in c\} \to \mathbf{P}\{\xi_2(t) \in c\}, \text{ если } \mathbf{P}\{\xi_2(t) \in \bar{c} \cap \overline{\mathfrak{F}^{(m)} \setminus c}\} = 0.$$

Лемма доказана.

§ 2. Несколько примеров

1. Пусть $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_k^{(1)}$ — независимые случайные величины; $\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots, \xi_k^{(2)}$ — также независимые между собой случайные величины. Предположим, что каждая из этих случайных величин принимает лишь конечное число значений, причем $\xi_r^{(1)}$ принимает значения $x_r^{(1)}, \ldots, x_r^{(mr)}$

с вероятностями $p_r^{(1)}, p_r^{(2)}, \ldots, p_r^{(m_r)} \left(\sum_{j=1}^{m_r} p_r^{(j)} = 1\right)$, $\xi_r^{(2)}$ принимает те же значения $x_r^{(1)}, \ldots, x_r^{(m_r)}$ с вероятностями

$$q_r^{(1)}, \ldots, q_r^{(m_r)} \left(\sum_{j=1}^{m_r} q_r^{(j)} = 1\right).$$

Рассмотрим дискретные случайные процессы:

$$\begin{aligned} \xi_1(j) &= \sum_{i \leqslant j} \xi_i^{(1)}, \qquad j = 1, \ldots, k \\ \xi_2(j) &= \sum_{i \leqslant j} \xi_i^{(2)}, \qquad j = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Найдем $\frac{d\mu_{\xi_2(j)}}{d\mu_{\xi_1(j)}}(\xi_1(j))$. Процесс $\xi_1(j)$ задается полностью последовательностью величин $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_k^{(1)}$, так же как и процесс $\xi_2(j)$ последовательностью величин $\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots, \xi_k^{(2)}$.

Легко видеть, что

$$\frac{d\mu_{\xi_2(j)}}{d\mu_{\xi_1(j)}} = \prod_{r=1}^{k} \frac{q_r^{(i_r)}}{p_r^{(i_r)}}$$

для той траектории, у которой $\xi_1(1) = x_1^{(i_1)}$, $\xi_1(j) - \xi_1(j-1) = x_j^{(i_j)}$.

Пусть $q_r^i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m_r$. Введем случайные величины: $\psi_r = \log \frac{q_r^{(i_r)}}{p_r^{(i_r)}}$, если $\xi_r^{(1)} = x_r^{(i_r)}$. Тогда:

$$\frac{d\mu_{\xi_2(j)}}{d\mu_{\xi_1(j)}}(\xi_1, (j)) = \exp\left\{\sum_{r=1}^{k} \psi_r\right\}, \tag{2.2}$$

так что, если через $\mu^l_{\xi_1(j)}$ и $\mu^l_{\xi_2(j)}$ обозначить меры, соответствующие нашим процессам, рассматриваемым для $j \leqslant l$, то

$$\frac{d\mu^l_{\xi_2(j)}}{d\mu^l_{\xi_1(j)}}(\xi_1(j)) = \exp\left\{\sum_{r=1}^{l} \psi_r\right\}.$$

Рассмотрим дискретный случайный процесс

$$\zeta(l) = \left[\log \frac{d\mu^l_{\xi_2(j)}}{d\mu^l_{\xi_1(j)}}(\xi_1(j)); \quad \xi_1(l)\right] = \sum_{r=1}^{l} \chi_r, \tag{2.3}$$

где χ_r — пара $[\psi_r; \xi_r^{(1)}]$. Так как χ_r при различных r независимы, то $\zeta(l)$ будет процессом с независимыми приращениями.

Пусть φ_r — случайные величины, принимающие значения $\frac{q_r^{(i_r)} - p_r^{(i_r)}}{p_r^{(i_r)}}$, если $\xi_r^{(1)} = x_r^{(i_r)}$. Тогда

$$\frac{d\mu_{\xi_2(j)}}{d\mu_{\xi_1(j)}}(\xi_1(j)) = \prod_{r=1}^{k} (1 + \varphi_r).$$

Непосредственно проверяется, что $\mathbf{E}\varphi_r = 0$. Следовательно

$$\mathbf{E}\left(\frac{d\mu_{\xi_2(j)}}{d\mu_{\xi_1(j)}}(\xi_1(j))\right)^2 = \prod_{r=1}^{k}(1+\mathbf{E}\varphi_r^2) \leqslant \exp\left\{\sum_{r=1}^{k}\mathbf{D}\varphi_r\right\}. \tag{2.4}$$

2. Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — стохастические непрерывные процессы с независимыми приращениями, траектории которых с вероятностью 1 всюду постоянны, за исключением конечного числа точек, где произошли скачки. Характеристическая функция этих процессов имеет вид:

$$\mathbf{E}\{e^{i(z,\,\xi_j(t))}\} = \exp\left\{\int\limits_{\substack{u\in R^{(m)}\\ 0\leqslant\tau\leqslant t}}(e^{i(z,\,u)}-1)\,P_j(d\tau\times du)\right\};\ j=1,2; \tag{2.5}$$

здесь $z\in R^{(m)}$, (z, u) — скалярное произведение, а P_1 и P_2 — конечные положительные меры в пространстве $[0,1]\times R^{(m)}$. Для однородных процессов $P_j(d\tau\times du) = d\tau\,\overline{P}_j(du)$, где $\overline{P}_j$ — конечные положительные меры $R^{(m)}$. В этом случае оказывается возможным непосредственный подсчет

$$\frac{d\mu_{\xi_2(t)}}{d\mu_{\xi_1(t)}}(x(t)).$$

Очевидно, что $\mu_{\xi_2(t)}$ может быть абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\xi_1(t)}$ лишь в том случае, если мера P_2 абсолютно непрерывна относительно меры P_1 (это следует из того, что для любого множества $A\subset[0,1]\times R^{(m)}$, $P_j(A)$ обозначает математическое ожидание числа точек τ, для которых $[\tau;\ \xi_j(\tau+0)-\xi_j(\tau-0)]\in A$, а само это число распределено по закону Пуассона). Пусть $\rho(\tau, u)$ обозначает плотность меры P_2 относительно меры P_1. Поскольку в нашем случае можно считать, что меры $\mu_{\xi_2(t)}$ и $\mu_{\xi_1(t)}$ сосредоточены лишь на ступенчатых функциях, то если $x(t)$ — ступенчатая функция, у которой скачки произошли в точках $\tau_1, \tau_2, \ldots$ $\ldots, \tau_k$, а величины этих скачков равны соответственно u_j, т. е. $x(\tau_j+0)-x(\tau_j-0)=u_j$, то

$$\frac{d\mu_{\xi_2(t)}}{d\mu_{\xi_1(t)}}(x(t)) = \prod_{i=1}^{k}\rho(\tau_i, u_i). \tag{2.6}$$

Применяя теперь 1.1 к мерам $\mu_k^{(1)}(\mathfrak{A}) = \mathbf{P}\{\xi_1(t)\in\mathfrak{A};\ \nu_1=k\}$ и $\mu_k^{(2)}(\mathfrak{A}) = \mathbf{P}\{\xi_2(t)\in\mathfrak{A},\ \nu_2=k\}$, где ν_1 и ν_2 обозначают соответственно число скачков $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, мы получим следующее утверждение:

2.1. *Если $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ определяются формулой* (2.5) *и мера P_2, абсолютно непрерывна относительно меры P_1, то и $\mu_{\xi_2(t)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\xi_1(t)}$.*

§ 3. Нормальные процессы с независимыми приращениями

Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ нормальные процессы с независимыми приращениями. Тогда их характеристические функции будут иметь вид:

$$\mathbf{E}e^{i(z,\xi_j(t))} = \exp\left\{i(z, a_j(t)) - \frac{1}{2}(A_j(t)z, z)\right\};\quad j=1,2, \tag{3.1}$$

где $a_j(t)$ — определенная для $t \in [0,1]$ функция со значениями из $R^{(m)}$, а $\mathcal{A}_j(t)$ при любом $t \in [0,1]$ есть некоторое симметричное преобразование в $R^{(m)}$, для которого квадратичные формы $(\mathcal{A}_j(0)z, z)$ и $([\mathcal{A}_j(t+h) - \mathcal{A}_j(t)]z, z)$ неотрицательны при $h > 0$. Мы будем рассматривать только стохастически непрерывные нормальные процессы с независимыми приращениями, т. е. такие, процессы, для которых $a_j(t)$ и $\mathcal{A}_j(t)$ в формуле (3.1) непрерывны по t. Для таких процессов справедлива

3.1. **Теорема**. *Для того чтобы* $\mu_{\xi_2(t)}$ *была абсолютно непрерывна относительно* $\mu_{\xi_1(t)}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}_2(t)$ *и существовала функция* $p(t)$ *со значениями из* $R^{(m)}$, *для которой*

$$a_2(t) - a_1(t) = \int_0^t [d_\tau \mathcal{A}_1(\tau)]\, p(\tau) \tag{3.2}$$

и

$$\int_0^1 ([d_\tau \mathcal{A}_1(\tau)]\, p(\tau),\ p(\tau)) < \infty\ *. \tag{3.3}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $e^{(1)}_{n,k}, e^{(2)}_{n,k}, \ldots, e^{(m)}_{n,k}$ — ортонормированная система собственных векторов, $\lambda^{(1)}_{n,k}, \lambda^{(2)}_{n,k}, \ldots, \lambda^{(m)}_{n,k}$ — соответствующие им собственные значения преобразования $\mathcal{A}_1\left(\frac{k}{n}\right) - \mathcal{A}_1\left(\frac{k-1}{n}\right)$.

Рассмотрим две последовательности серий независимых в каждой серии случайных величин: $x^{(1)}_{n,1}, x^{(1)}_{n,2}, \ldots, x^{(1)}_{n,n}$ и $x^{(2)}_{n,1}, x^{(2)}_{n,2} \ldots, x^{(2)}_{n,n}$, для которых

$$\mathbf{P}\left\{x^{(1)}_{n,k} = a_1\left(\frac{k}{n}\right) - a_1\left(\frac{k-1}{n}\right) \pm \sqrt{m\lambda^{(j)}_{n,k}}\, e^{(j)}_{n,k}\right\} = \frac{1}{2m}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$\mathbf{P}\left\{x^{(2)}_{n,k} = a_1\left(\frac{k}{n}\right) - a_1\left(\frac{k-1}{n}\right) \pm \sqrt{m\lambda^{(j)}_{n,k}}\, e^{(j)}_{n,k}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(1 \pm \frac{\left(\Delta\left(\frac{k}{n}\right) - \Delta\left(\frac{k-1}{n}\right),\ e^{(j)}_{n,k}\right)\sqrt{m}}{\sqrt{\lambda^{(j)}_{n,k}}}\right),$$

$$\Delta(t) = a_2(t) - a_1(t), \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Из теоремы, приведенной во введении, легко следует, что конечномерные распределения процессов

$$x^{(1)}_n(t) = \sum_{k \leqslant t(n+1)} x^{(1)}_{n,k} \text{ и } x^{(2)}_n(t) = \sum_{k \leqslant t(n+1)} x^{(2)}_{n,k}$$

---

* Если $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — ортонормированный базис в R^m и $\|\alpha_{i,j}(t)\|$ — матрица преобразования $\mathcal{A}_1(t)$ в этом базисе, $\beta_i(t)$ — координаты вектор-функции $b(t)$, а $\gamma_i(t)$ — координаты вектор-функции $g(t)$ в этом базисе, то

$$\int_a^b [d_t \mathcal{A}_1(t)]\, b(t) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \int_a^b \beta_j(t)\, d_t \alpha_{k,j}(t)\right) e_k,$$

$$\int_a^b ([d_t \mathcal{A}_1(t)]\, b(t),\ g(t)) = \sum_{\substack{k=1 \\ j=1}}^{m} \int_a^b \beta_k(t)\, \gamma_j(t)\, d_t \alpha_{k,j}(t).$$

сходятся соответственно к конечномерным распределениям процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Но на основании (2.4)

$$\mathbf{E}\left(\frac{d\mu_{x_n^{(2)}(t)}}{d\mu_{x_n^{(1)}(t)}}\left(x_n^{(1)}(t)\right)\right)^2 \leqslant \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}\varphi_{n,k}\right\},$$

где

$$\varphi_{n,k} = \pm\frac{\left(\Delta\left(\frac{k}{n}\right)-\Delta\left(\frac{k-1}{n}\right),\ e_{n,k}^{(j)}\right)}{\sqrt{\lambda_{n,k}^{(j)}}}\sqrt{m},$$

если

$$x_{n,k}^{(1)} = a_1\left(\frac{k}{n}\right)-a_1\left(\frac{k-1}{n}\right)\pm\sqrt{m\lambda_{n,k}^{(j)}}\,e_{n,k}^{(j)}.$$

$$\mathbf{D}\varphi_{n,k} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{m\left(\Delta\left(\frac{k}{n}\right)-\Delta\left(\frac{k-1}{n}\right),\ e_{n,k}^{(j)}\right)^2}{\lambda_{n,k}^{(j)}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_{n,k}^{(j)}}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[d_t\mathcal{A}_1(t)]\,p(t),\ e_{n,k}^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_{n,k}^{(j)}}\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}([d_t\mathcal{A}_1(t)]\,p(t),\ e_{n,k}^{(j)})\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_{n,k}^{(j)}}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}([d_t\mathcal{A}_1(t)]\,p(t),p(t))\cdot\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}([d_t\mathcal{A}_1(t)]\,e_{n,k}^{(j)},\ e_{n,k}^{(j)}) =$$

$$= m\int_{\frac{k-1}{n}\leqslant t\leqslant\frac{k}{n}}([d_t\mathcal{A}_1(t)\,p(t),\ p(t))^*. \tag{3.4}$$

Значит

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}\varphi_{n,k} \leqslant m\int_0^1([d_t\mathcal{A}_1(t)]\,p(t),\ p(t))$$

и, применяя 1.2, мы и получим доказательство достаточности.

Необходимость. Пусть $\mu_{\xi_2(t)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\xi_1(t)}$. Покажем сначала, что $\mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}_2(t)$. Для этой цели рассмотрим одномерные нормальные процессы с независимыми приращениями $\eta_{i1}(t) = (z,\ \xi_1(t))$ и $\eta_{i2}(t) = (z,\ \xi_2(t))$, где z — некоторый вектор из $R^{(m)}$. Очевидно, что $\mu_{\eta_2(t)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\eta_1(t)}$. Легко подсчитать:

$$\mathbf{E}\eta_j(t) = (z,\ \mathbf{E}\xi_j(t)) = (z,\ a_j(t)).\quad \mathbf{D}\eta_j(t) = (\mathcal{A}_j(t)\,z,\ z).$$

---

* Неравенство

$$\left[\int_0^1([d_t\mathcal{A}_1(t)]\,a(t),\ b(t)\right]^2 \leqslant \int_0^1([d_t\mathcal{A}_1(t)]\,a(t),\ a(t))\cdot\int_0^1([d_t\mathcal{A}_1(t)]\,b(t),\ b(t))$$

выводится точно так же, как для скалярного произведения выводится неравенство Коши — Буняковского (см., напр., [6], стр. 11).

Таким образом для доказательства того, что $\mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}_2(t)$, достаточно показать, что $\mathbf{D}\eta_1(t) = \mathbf{D}\eta_2(t)$ для любого $z \in R^{(m)}$. Предположим, что для некоторого t имеем $(\mathcal{A}_1(t)z, z) \neq (\mathcal{A}_2(t)z, z)$, например

$$(\mathcal{A}_1(t)z, z) < (\mathcal{A}_2(t)z, z).$$

Тогда существует такое $\delta > 0$ и для каждого N такие точки $t_1 < t_1' \leqslant t_2 < t_2' \leqslant t_N < t_N'$, что

$$\frac{(\mathcal{A}_1(t_j')z, z) - (\mathcal{A}_1(t_j)z, z)}{(\mathcal{A}_2(t_j')z, z) - (\mathcal{A}_2(t_j)z, z)} \leqslant 1 - \delta, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Значит

$$\mathbf{P}\Big\{|\eta_1(t_j') - \eta_1(t_j) - \mathbf{E}(\eta_1(t_j') - \eta_1(t_j))| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\tfrac{1}{2}(\log N)\,\mathbf{D}(\eta_1(t_j') - \eta_1(t_j))}; \quad j = 1, 2, \ldots, N\Big\} =$$

$$= \prod_{j=1}^{N} \mathbf{P}\Big\{|\eta_1(t_j') - \eta_1(t_j) - \mathbf{E}(\eta_1(t_j') - \eta_1(t_j))| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\tfrac{1}{2}(\log N)\cdot\mathbf{D}(\eta_1(t_j') - \eta_1(t_j))}\Big\} =$$

$$= \Big(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\sqrt{\frac{1}{2}\log N}}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\, d\alpha\Big)^N \to 1 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Но

$$\mathbf{P}\Big\{|\eta_2(t_j') - \eta_2(t_j) - \mathbf{E}(\eta_1(t_j') - \eta_1(t_j))| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\tfrac{1}{2}(\log N)\cdot\mathbf{D}(\eta_1(t_j') - \eta_1(t_j))}, \quad j = 1, \ldots, N\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{N} \mathbf{P}\Big\{|\eta_2(t_j') - \eta_2(t_j) - \mathbf{E}(\eta_2(t_j') - \eta_2(t_j))| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\tfrac{1}{2}(\log N)\cdot(1-\delta)\,\mathbf{D}(\eta_2(t_j') - \eta_2(t_j))}\Big\} =$$

$$= \Big(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\sqrt{\frac{1-\delta}{2}\log N}}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\, d\alpha\Big)^N \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Это же противоречит тому, что $\mu_{\xi_2(t)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\xi_1(t)}$. Покажем теперь, что существует такой вектор $p(t)$, для которого выполнены (3.2) и (3.3).

Рассмотрим гильбертово пространство $L^2_{\mathcal{A}_1(t)}$, элементами которого являются классы K вектор-функций $x(t)$ со значениями из $R^{(m)}$, для которых

$$\int_0^1 ([d_\tau \mathcal{A}_1(\tau)]\, x(\tau),\ x(\tau)) < \infty,$$

причем $x_1(t)$ и $x_2(t)$ принадлежат одному и тому же классу из $L^2_{\sigma\mathcal{A}_1(t)}$, если при любом $z \in R^{(m)}$ равенство $\mathcal{A}_1(t)\,x_1(t) = \mathcal{A}_2(t)\,x_2(t)$ имеет место для почти всех t по мере, порождаемой функцией $\sigma_z(t) = (\mathcal{A}_1(t)\,z,\ z)$. Очевидно, что

$$\int_0^1 ([d_\tau \mathcal{A}_1(\tau)]\,x(\tau),\ y(\tau))$$

зависит лишь от того, из каких классов взяты $x(t)$ и $y(t)$. Следовательно, можно определить скалярное произведение между классами K_1 и K_2 по формуле:

$$(K_1,\ K_2) = \int_0^1 ([d_\tau \mathcal{A}_1(\tau)]\,x_1(\tau),\ x_2(\tau)), \tag{3.5}$$

где $x_1(\tau) \in K_1$, $x_2(\tau) \in K_2$. Легко проверить, что при этом выполняются все свойства скалярного произведения. Норма какого-либо класса K определится по формуле:

$$\|K\| = \int_0^1 ([d_\tau \mathcal{A}_1(\tau)]\,x(\tau),\ x(\tau)), \tag{3.6}$$

где $x(\tau) \in K$.

3.2. **Лемма.** *Пространство $L^2_{\sigma\mathcal{A}_1(t)}$ с введенным формулой* (3.5) *скалярным произведением будет сепарабельным гильбертовым пространством.*

Сепарабельность $L^2_{\sigma\mathcal{A}_1(t)}$ более или менее очевидна. Полноту же $L^{(2)}_{\sigma\mathcal{A}_1(t)}$ нетрудно доказать, используя простейшие сведения из линейной алгебры и теорему о возможности выбора из сходящейся по мере последовательности, подпоследовательности, сходящейся почти всюду. Из-за недостатка места мы не будем останавливаться на доказательстве этой леммы.

Положим $\Delta_{n,j} = a_2\left(\frac{j}{n}\right) - a_1\left(\frac{j}{n}\right) - a_2\left(\frac{j-1}{n}\right) + a_1\left(\frac{j-1}{n}\right)$. Очевидно, что существуют векторы $p_{n,j}$, для которых

$$\Delta_{n,j} = \left(\mathcal{A}_1\left(\frac{j}{n}\right) - \mathcal{A}_1\left(\frac{j-1}{n}\right)\right) p_{n,j},$$

иначе $\xi_2\left(\frac{j}{n}\right) - \xi_2\left(\frac{j-1}{n}\right)$ и $\xi_1\left(\frac{j}{n}\right) - \xi_1\left(\frac{j-1}{n}\right)$ лежали бы в различных гиперплоскостях. Покажем, что существует такое C, что

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\left[\mathcal{A}_1\left(\frac{j}{n}\right) - \mathcal{A}_1\left(\frac{j-1}{n}\right)\right] p_{n,j},\ p_{n,j}\right) \leqslant C. \tag{3.7}$$

Предположим, что (3.7) не выполняется. Тогда для каждого N существует такое n_N, что

$$\sum_{j=1}^{n_N} \left(\left[\mathcal{A}_1\frac{j}{n_N}\right) - \mathcal{A}_1\left(\frac{j-1}{n_N}\right)\right] p_{n,j},\ p_{n,j}\Big) \geqslant N. \tag{3.8}$$

Рассмотрим величины $\varphi_N^{(1)}$ и $\varphi_N^{(2)}$, имеющие нормальное распределение:

$$\varphi_N^{(1)} = \sum_{j=1}^{n_N} \left(\xi_1\left(\frac{j}{n_N}\right) - \xi_1\left(\frac{j-1}{n_N}\right),\ p_{n_N,j}\right);$$

$$\varphi_N^{(2)} = \sum_{j=1}^{n_N} \left(\xi_2\left(\frac{j}{n_N}\right) - \xi_2\left(\frac{j-1}{n_N}\right),\ p_{n_N,j} \right).$$

Легко убедиться, что

$$\mathbf{E}\varphi_N^{(2)} - \mathbf{E}\varphi_N^{(1)} = \mathbf{D}\varphi_N^{(1)} = \mathbf{D}\varphi_N^{(2)} = \sum_{j=1}^{n_N} \left(\left[\mathcal{A}_1\left(\frac{j}{n_N}\right) - \mathcal{A}_1\left(\frac{j-1}{n_N}\right) \right] p_{n_N,j},\quad p_{n_N,j} \right).$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{ \varphi_N^{(1)} < \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}\varphi_N^{(1)} + \mathbf{E}\varphi_N^{(2)} \right) \right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{ \frac{\varphi_N^{(1)} - \mathbf{E}\varphi_N^{(1)}}{\sqrt{\mathbf{D}\varphi_N^{(1)}}} < \frac{\mathbf{E}\varphi_N^{(2)} - \mathbf{E}\varphi_N^{(1)}}{2\sqrt{\mathbf{D}\varphi_N^{(1)}}} \right\} = \mathbf{P}\left\{ \frac{\varphi_N^{(1)} - \mathbf{E}\varphi_N^{(1)}}{\sqrt{\mathbf{D}\varphi_N^{(1)}}} < -\frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{D}\varphi_N^{(1)}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{D}\varphi_N^{(1)}}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\sqrt{N}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \to 1 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

а

$$\mathbf{P}\left\{ \varphi_N^{(2)} < \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}\varphi_N^{(1)} + \mathbf{E}\varphi_N^{(2)} \right) \right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{ \frac{\varphi_N^{(2)} - \mathbf{E}\varphi_N^{(2)}}{\sqrt{\mathbf{D}\varphi_N^{(2)}}} < -\frac{\sqrt{\mathbf{D}\varphi_N^{(2)}}}{2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{D}\varphi_N^{(2)}}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Это невозможно, если $\mu_{\xi_2(t)}$ абсолютно непревывна относительно $\mu_{\xi_1(t)}$. Значит имеет место (3.7)

Рассмотрим вектор-функции $p_n(t)$:

$$p_n(t) = p_{n,j} \text{ если } t \in \left[\frac{j-1}{n},\ \frac{j}{n} \right);\quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда

$$\int_0^1 [(d\mathcal{A}_1(\tau)]\, p_n(\tau),\ p_n(\tau)) = \sum_{j=1}^{n} \left(\left[\mathcal{A}_1\left(\frac{j}{n}\right) - \mathcal{A}_1\left(\frac{j-1}{n}\right) \right] p_{n,j},\ p_{n,j} \right) \leqslant C.$$

Значит, если K_n обозначает класс из $L^2_{\mathcal{A}_1(t)}$, которому принадлежит $p_n(t)$, то $\| K_n \| \leqslant C$. Поэтому последовательность K_n слабо компактна, т. е. существуют класс K_0 и последовательность n_r такие, что для каждого $K \in L^2_{\mathcal{A}_1(t)}$

$$\lim_{r \to \infty} (K_{n_r},\ K) = (K_0,\ K).$$

Значит

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^1 ([d_\tau \mathcal{A}_1(\tau)]\, p_{n_r}(\tau),\ x(\tau)) = \int_0^1 ([d\mathcal{A}_1(\tau)]\, p(\tau),\ x(\tau)), \quad \text{где} \quad p(\tau) \in K_0.$$

Пусть

$$x(\tau) = \begin{cases} z, & \tau \leqslant t \\ 0, & \tau > t. \end{cases}$$

Тогда получим:

$$\sum_{\frac{j}{n_\tau}\leqslant t}\left[\left(\mathcal{A}_1\left(\frac{j}{n_\tau}\right)-\mathcal{A}_1\left(\frac{j-1}{n_\tau}\right)\right]p_{n_\tau,\,j}(z)\right)+$$

$$+\left(\left[\mathcal{A}_1(t)-\mathcal{A}_1\left(\frac{[tn_\tau]}{n_\tau}\right)\right]p_{n_\tau\,[tn_\tau]}(z)\right)\to\int_0^t([d_\tau\mathcal{A}_1(\tau)]\,p(\tau),\,z),$$

([tn_τ] — целая часть tn_τ), или

$$(a_2(t)-a_1(t),\,z)=\int_0^t([d_\tau\mathcal{A}_1(\tau)]\,p(\tau),\,z),$$

ввиду стохастической непрерывности процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Отсюда, в силу произвольности z, следует, что

$$a_2(t)-a_1(t)=\int_0^t[d_\tau\mathcal{A}_1(\tau)]\,p(\tau).$$

Теорема доказана.

3.3. Замечание. Если мы проследим доказательство необходимости условий теоремы 3.1, то убедимся, что при нарушении условий теоремы 3.1 меры $\mu_{\xi_1(t)}$ и $\mu_{\xi_2(t)}$ будут сингулярны, т. е. существует множество $\mathfrak{A}$, для которого

$$\mu_{\xi_1(t)}(\mathfrak{A})=1,\quad \mu_{\xi_2(t)}(\mathfrak{A})=0.$$

§ 4. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости мер, соответствующих процессам с независимыми приращениями

Будем рассматривать только стохастически непрерывные процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Такие процессы определяются своими характеристическими функциями:

$$\mathbf{E}e^{i(z,\,\xi_j(t))}=\exp\left\{i(z,\,a_j(t))-\frac{1}{2}(\mathcal{A}_j(t)\,z,\,z)+\right.$$

$$\left.+\int_{\substack{(u,\,u)\leqslant 1\\ 0\leqslant\tau\leqslant t}}(e^{i(z,\,u)}-1-i(z,\,u))\,P_j(d\tau\times du)+\int_{\substack{(u,\,u)>1\\ 0\leqslant\tau\leqslant t}}(e^{i(z,\,u)}-1)\,P_j(d\tau\times du)\right\},$$

$$j=1,\,2,\qquad(4.1)$$

где $a_j(t)$ — непрерывная функция со значениями из $R^{(m)}$, $\mathcal{A}_j(t)$ — линейное преобразование в $R^{(m)}$, непрерывно зависящее от t, такое, что $\mathcal{A}_j(0)$ и $\mathcal{A}_j(t+h)-\mathcal{A}_j(t)$ при $h>0$ будут неотрицательными симметричными преобразованиями, а P_j — мера в $[0,\,1]\times R^{(m)}$ такая, что для всякого $\varepsilon>0$ мера множества

$$\{[0,\,1]\times R^{(m)}\}\setminus\{[0,\,1]\times S_\varepsilon\}$$

конечна (S_ε — сфера в $R^{(m)}$ с центром в начале радиуса ε)

$$\int_{\substack{(u,\,u)\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant 1}}(u,\,u)\,P_j(dt\times du)<\infty.$$

Теорема А. *Для того чтобы* $\mu_{\xi_2(t)}$ *была абсолютно непрерывна относительно меры* $\mu_{\xi_1(t)}$, *если характеристические функции процессов* $\xi_1(t)$

и $\xi_2(t)$ *задаются формулой* (4.1), *необходимо и достаточно выполнения следующих условий*:

А.1. $\mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}_2(t)$;

А.2. *Существует такое* $\rho(t, u)$, *что*

А.2.1. *Для всякого борелевского* $B \subset R^{(m)}$

$$\int\limits_{\substack{u \in B \\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2}} P_2(dt \times du) = \int\limits_{\substack{u \in B \\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2}} \rho(t, u) P_1(dt \times du);$$

А.2.2. $$\int\limits_{|\rho(t, u) - 1| > \frac{1}{2}} |\rho(t, u) - 1| P_1(dt \times du) < \infty$$

А.2.3. $$\int\limits_{|\rho(t, u) - 1| \leqslant \frac{1}{2}} (\rho(t, u) - 1)^2 P_1(dt \times du) < \infty$$

А.2.4. *Интеграл* $\int\limits_{\substack{(u, u) \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1}} (\rho(t, u) - 1)\, uP_1(dt \times du)$ *сходится, и если*

$$\Delta(t) = a_2(t) - a_1(t) - \int\limits_{\substack{(u, u) \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \tau \leqslant t}} [\rho(t, u) - 1]\, uP_1(d\tau \times du),$$

то существует такая вектор-функция $p(t)$, *что*

$$\Delta(t) = \int_0^t [d_\tau \mathcal{A}_1(\tau)]\, p(\tau)$$

и

$$\int_0^1 ([d_t \mathcal{A}_1(t)]\, p(t), p(t)) < \infty\ *$$

Доказательство достаточности условий теоремы, ввиду 1.3, можно свести к доказательству следующих трех утверждений:

a_1) $\mu_{\xi_2(t)}$ *абсолютно непрерывна относительно* $\mu_{\xi_1(t)}$, *если* $\mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}_2(t) = 0$, $\Delta(t) = 0$, *выполнены* А.2 *и* А.3, *и*

$$\int\limits_{\substack{u \in R^{(m)} \\ 0 \leqslant t \leqslant 1}} P_1(dt \times du) < \infty;$$

доказательство этого утверждения немедленно следует из 2.1;

a_2) $\mu_{\xi_2(t)}$ *абсолютно непрерывна относительно* $\mu_{\xi_1(t)}$, *если* $P_1 = P_2 = 0$ *и выполнены условия* А.1 и А.2.4; доказательство этого утверждения составляет содержание теоремы 3.1;

a_3) $\mu_{\xi_2(t)}$ *абсолютно непрерывна относительно* $\mu_{\xi_1(t)}$, *если* $\mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}_2(t) = 0$, *выполнено условие* А.2.1, $|\rho(t, u) - 1| \leqslant \frac{1}{2}$,

$$\int\limits_{\substack{(u, u) > 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1}} P_1(dt \times du) = 0,\ \Delta(t) = 0,$$

а также выполнено условие А.2.3.

* См. примечание на стр. 426.

Доказательство а$_3$). Рассмотрим две последовательности серий независимых в каждой серии случайных величин $x^{(1)}_{n,1}, x^{(1)}_{n,2}, \ldots, x^{(1)}_{n,n}$ $x^{(2)}_{n,1}, x^{(2)}_{n,2}, \ldots, x^{(2)}_{n,n}$, построенных следующим образом.

Обозначим через ε_n число, для которого

$$\int\limits_{\substack{(u,\,u)=\varepsilon_n \\ 0\leqslant t\leqslant 1}} P_1(dt\times du)=0; \qquad \int\limits_{\substack{(u,\,u)\geqslant\varepsilon_n \\ 0\leqslant t\leqslant 1}} P_1(dt\times du)\leqslant \log n. \tag{4.2}$$

Пусть множество всех u, $\varepsilon_n \leqslant (u,u) \leqslant 1$ разложено на сумму непересекающихся множеств $B_{n,k}$; $k=1,2,\ldots,l_n$, диаметр каждого из которых не превосходит $\frac{1}{n^2}$; выберем в каждом множестве $B_{n,k}$ по одной точке $u_{n,k}$; пусть далее $0=t_{n,0}<t_{n,1}<\ldots<t_{n,n}=1$ выбраны так, что

$$\int\limits_{\substack{(u,\,u)\geqslant\varepsilon_n \\ t_{n,\,j-1}\leqslant\tau<t_{n,\,j}}} P_1(d\tau\times du)=\frac{1}{n}\int\limits_{\substack{(u,\,u)\geqslant\varepsilon_n \\ 0\leqslant\tau\leqslant 1}} P_1(d\tau\times du); \tag{4.3}$$

положим тогда:

$$\mathbf{P}\{x^{(1)}_{n,j}=u_{n,k}\}=p^{(j)}_{n,k}=\int\limits_{\substack{u\in B_{n,\,k} \\ t_{n,\,j-1}\leqslant t<t_{n,\,j}}} P_1(dt\times du), \tag{4.4}$$

$$\mathbf{P}\{x^{(2)}_{n,j}=u_{n,k}\}=q^{(j)}_{n,k}=\int\limits_{\substack{u\in B_{n,\,k} \\ t_{n,\,j-1}\leqslant t<t_{n,\,j}}} P_2(dt\times du), \tag{4.5}$$

$$\mathbf{P}\left\{x^{(1)}_{n,j}=2\,\frac{a_1(t_{n,j})-a_1(t_{n,j-1})-\sum\limits_k p^{(j)}_{n,k}u_{n,k}}{1-\sum\limits_k p^{(j)}_{n,k}}\right\}=\frac{1}{2}\left(1-\sum_k p^{(j)}_{n,k}\right), \tag{4.6}$$

$$\mathbf{P}\left\{x^{(2)}_{n,j}=\frac{a_1(t_{n,j})-a_1(t_{n,j-1})-\sum\limits_k p^{(j)}_{n,k}u_{n,k}}{1-\sum\limits_k p^{(j)}_{n,k}}\right\}=\frac{1}{2}\left(1-\sum_k p^{(j)}_{n,k}\right), \tag{4.7}$$

$$\mathbf{P}\{x^{(1)}_{n,j}=0\}=\frac{1}{2}\left(1-\sum_k p^{(j)}_{n,k}\right);$$

$$\mathbf{P}\{x^{(2)}_{n,j}=0\}=\frac{1}{2}\left(1-\sum_k p^{(j)}_{n,k}\right)+\sum_k (p^{(j)}_{n,k}-q^{(j)}_{n,k}). \tag{4.8}$$

Легко проверить, что конечномерные распределения процессов

$$\xi^{(n)}_1(t)=\sum_{t_{n,\,j}\leqslant t} x^{(1)}_{n,j} \quad \text{и} \quad \xi^{(n)}_2(t)=\sum_{t_{n,\,j}\leqslant t} x^{(2)}_{n,j}$$

сходятся соответственно к конечномерным распределениям процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

В соответствии с (2.4)

$$\mathbf{E}\left(\frac{d\mu_{\xi^{(n)}_2(t)}}{d\mu_{\xi^{(n)}_1(t)}}(\xi^{(n)}_1(t))\right)^2\leqslant\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\mathrm{D}\varphi_{n,j}\right\},$$

где

$$\varphi_{n,\,j}=\begin{cases}\dfrac{q^{(j)}_{n,\,k}-p^{(j)}_{n,\,k}}{p^{(j)}_{n,\,k}}, & \text{если } x^{(1)}_{n,\,j}=u_{n,\,k},\\[2ex] 0, & \text{если } x^{(1)}_{n,\,j}=2\dfrac{a_1(t_{n,\,j})-a_1(t_{n,\,j-1})-\sum\limits_k p^{(j)}_{n,\,k}u_{n,\,k}}{1-\sum\limits_k p^{(j)}_{n,\,k}},\\[2ex] \dfrac{2\sum\limits_k (p^{(j)}_{n,\,k}-q^{(j)}_{n,\,k})}{1-\sum p^{(j)}_{n,\,k}}, & \text{если } x^{(1)}_{n,\,j}=0.\end{cases} \tag{4.9}$$

Поэтому

$$\mathbf{D}\varphi_{n,\,j}=\sum_k\frac{(q^{(j)}_{n,\,k}-p^{(j)}_{n,\,k})^2}{p^{(j)}_{n,\,k}}+\frac{2\left[\sum\limits_k (p^{(j)}_{n,\,k}-q^{(j)}_{n,\,k})\right]^2}{1-\sum\limits_k p^{(j)}_{n,\,k}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_k\frac{(q^{(j)}_{n,\,k}-p^{(j)}_{n,\,k})^2}{p^{(j)}_{n,\,k}}+\frac{2\log^2 n}{n(n-\log n)},$$

а значит

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbf{D}\varphi_{n,\,j}\leqslant\int\limits_{\substack{u\in R^{(m)}\\ 0\leqslant t\leqslant 1}}(\rho(t,\,u)-1)^2P_1(dt\times du)+\frac{2\log^2 n}{(n-\log n)}. \tag{4.10}$$

Для доказательства нашего утверждения остается применить 1.2. Достаточность условий теоремы **A** доказана.

Перейдем теперь к доказательству необходимости условий теоремы.

Необходимость условий А.1 и А.2.4. Покажем, что если $\mu_{\xi_2(t)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\xi_1(t)}$, то и $\mu_{\overline{\xi}_2(t)}$ будет абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\overline{\xi}_1(t)}$, где процессы $\overline{\xi}_1(t)$ и $\overline{\xi}_2(t)$ задаются следующими характеристическими функциями:

$$\mathbf{E}e^{i(z,\,\overline{\xi}_1(t))}=\exp\left\{i(z,\,a_1(t))-\frac{1}{2}(\mathcal{A}_1(t)z,\,z)\right\}, \tag{4.11}$$

$$\mathbf{E}e^{i(z,\,\overline{\xi}_2(t))}=\exp\left\{i(z,\,a_1(t))+i(z,\,\Delta(t))-\frac{1}{2}(\mathcal{A}_2(t)z,\,z)\right\}. \tag{4.12}$$

Докажем это, используя 1.4. Построим последовательность $T_n(x(t),\,\tau)$ отображений $\mathfrak{F}^{(m)}$ в $\mathfrak{F}^{(m)}$ следующим образом:

$$T_n(x(t),\,\tau)=\sum_{\substack{j\leqslant n\tau\\ \left(x\left(\frac{j}{n}\right)-x\left(\frac{j-1}{n}\right),\,x\left(\frac{j}{n}\right)-x\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)\leqslant\alpha_n}}\left(x\left(\frac{j}{n}\right)-x\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)+$$

$$+\int\limits_{\substack{(u,\,u)\geqslant\alpha_n\\ 0\leqslant t\leqslant\tau}}uP_1(dt\times du),$$

где α_n последовательность, стремящаяся к нулю, для которой

$$\varliminf_{n\to\infty}\inf_j\mathbf{P}\left\{\left(\xi_1\left(\frac{j}{n}\right)-\xi_1\left(\frac{j-1}{n}\right),\ \xi_1\left(\frac{j}{n}\right)-\xi_1\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)\leqslant\alpha_n\right\}=1$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{j}\mathbf{P}\left\{\left(\xi_2\left(\frac{j}{n}\right)-\xi_2\left(\frac{j-1}{n}\right),\ \xi_2\left(\frac{j}{n}\right)-\xi_2\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)\leqslant\alpha_n\right\}=1,$$

(существование такой последовательности вытекает из стохастической непрерывности процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$).

Легко проверяется, что $T_n(\xi_1(t),\tau)$ при $n\to\infty$ сходится по вероятности к некоторому процессу $\bar{\xi}_1(\tau)$, характеристическая функция которого задается формулой (4.10), а $T_n(\xi_2(t),\tau)$ сходится по вероятности к некоторому процессу $\bar{\xi}_2(t)$, характеристическая функция которого задается формулой (4.12). Тогда на основании 1.4 мера $\mu_{\bar{\xi}_2(t)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\bar{\xi}_1(t)}$, и наше утверждение следует из необходимости условий теоремы 3.1.

Необходимость условия А.2.1. очевидна, так как если бы существовало такое $\widetilde{B}\subset[0,1]\times R^{(m)}$, что $P_2(\widetilde{B})>0$, $P_1(\widetilde{B})=0$, то у процесса $\xi_2(t)$ существовали бы с положительной вероятностью точки τ, для которых пара $[\tau;\ \xi_2(\tau+0)-\xi_2(\tau-0)]\in\widetilde{B}$, а у процесса $\xi_1(t)$ с вероятностью 1 таких точек не было бы, а это невозможно, если $\mu_{\xi_2(t)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\xi_1(t)}$.

Необходимость условия А.2.2. Пусть $\widetilde{C}$—множество тех пар $[\tau;u]$, для которых $|\rho(t,u)-1|>\frac{1}{2}$. Покажем, что $P_2(\widetilde{C})<\infty$ и $P_1(\widetilde{C})<\infty$, если $\mu_{\xi_2(t)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\xi_1(t)}$. Для этого достаточно показать, что $P_1(\widetilde{C})<\infty$, так как если бы при этом оказалось, что $P_2(\widetilde{C})=\infty$, то у $\xi_2(t)$ существовала бы с вероятностью 1 бесконечная последовательность точек τ, для которых $[\tau;\ \xi_2(\tau+0)-\xi_2(\tau-0)]\in\widetilde{C}$, тогда как у $\xi_1(t)$ с вероятностью 1 было бы лишь конечное число таких точек τ.

Предположим $P_1(\widetilde{C})=\infty$. Тогда либо $P_1(\widetilde{C}_1)=\infty$, либо $P_1(\widetilde{C}_2)=\infty$, где $\widetilde{C}_1$ множество пар $[\tau;u]$, для которых $\rho(\tau,u)>\frac{3}{2}$, а $\widetilde{C}_2$—множество пар $[\tau,u]$, для которых $\rho(\tau,u)<\frac{1}{2}$. Пусть, например, $P_1(\widetilde{C}_1)=\infty$. Обозначим через $\nu_\delta^{(1)}$ число точек τ, для которых $|\xi_1(\tau+0)-\xi_1(\tau-0)|>\delta$ и $[\tau;\ \xi_1(\tau+0)-\xi_1(\tau-0)]\in\widetilde{C}_1$, а через $\nu_\delta^{(2)}$ число точек τ, для которых $|\xi_2(\tau+0)-\xi_2(\tau-0)|>\delta$ и $[\tau;\ \xi_2(\tau+0)-\xi_2(\tau-0)]\in\widetilde{C}_1$. Величины $\nu_\delta^{(1)}$ и $\nu_\delta^{(2)}$ распределены по закону Пуассона с параметрами

$$\int\limits_{\substack{(t,u)\in\widetilde{C}_1\\(u,u)>\delta^2}}P_1(dt\times du)\quad\text{и}\quad\int\limits_{\substack{(t,u)\in\widetilde{C}_1\\(u,u)>\delta^2}}P_2(dt\times du).$$

Поскольку при $\delta\to0$

$$\mathbf{D}\nu_\delta^{(1)}=\mathbf{E}\nu_\delta^{(1)}\to\infty\quad\text{и}\quad\mathbf{D}\nu_\delta^{(2)}=\mathbf{E}\nu_\delta^{(2)}\to\infty,$$

то

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_\delta^{(1)}-\mathbf{E}\nu_\delta^{(1)}}{\sqrt{\mathbf{E}\nu_\delta^{(1)}}}<\alpha\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{2}}d\beta,$$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_\delta^{(2)}-\mathbf{E}\nu_\delta^{(2)}}{\sqrt{\mathbf{E}\nu_\delta^{(2)}}}<\alpha\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{2}}d\beta.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{\nu_\delta^{(2)} > \frac{3}{4}\,\mathbf{E}\nu_\delta^{(2)}\right\} \to 1,$$

$$\mathbf{P}\left\{\nu_\delta^{(1)} > \frac{3}{4}\,\mathbf{E}\nu_\delta^{(2)}\right\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_\delta^{(1)} - \mathbf{E}\nu_\delta^{(1)}}{\sqrt{\mathbf{E}\nu_\delta^{(1)}}} > \frac{\frac{3}{4}\,\mathbf{E}\nu_\delta^{(2)} - \mathbf{E}\nu_\delta^{(1)}}{\sqrt{\mathbf{E}\nu_\delta^{(1)}}}\right\} <$$

$$< \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_\delta^{(1)} - \mathbf{E}\nu_\delta^{(1)}}{\sqrt{\mathbf{E}\nu_\delta^{(1)}}} > \frac{1}{8}\sqrt{\mathbf{E}\nu_\delta^{(1)}}\right\} \to 0,$$

$$\left(\text{так как } \mathbf{E}\nu_\delta^{(2)} > \frac{3}{2}\,\mathbf{E}\nu_\delta^{(1)}\right).$$

Это же невозможно, если $\mu_{\xi_2(t)}$ абсолютно непрерывно относительно $\mu_{\xi_1(t)}$. Необходимость условия А.2.2 доказана.

Необходимость условия А.2.3. Предположим, что это условие не выполняется, т. е.

$$\int\limits_{|\rho(t,u)-1|\leqslant\frac{1}{2}} (\rho(t,u)-1)^2\,P_1(dt\times du) = \infty.$$

Тогда для любого N можно указать такие непересекающиеся множества из $[0,1]\times R^{(m)}$: $\widetilde{B}_1\,\widetilde{B}_2,\ldots,\widetilde{B}_{k_N}$, что

$$\sum_{j=1}^{k_N}\frac{(P_2(\widetilde{B}_j)-P_1(\widetilde{B}_j))^2}{P_1(\widetilde{B}_j)} > N \text{ и } \frac{1}{2}\leqslant\frac{P_2(\widetilde{B}_j)}{P_1(\widetilde{B}_j)}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Пусть $\nu_j^{(1)}$, $j=1,\ldots,k_N$, число точек τ, для которых $[\tau;\ \xi_1(\tau+0)-\xi_1(\tau-0)]\in\widetilde{B}_j$, а $\nu_j^{(2)}$, $j=1,\ldots,k_N$, число точек τ, для которых $[\tau;\ \xi_2(\tau+0)-\xi_2(\tau-0)]\in\widetilde{B}_j$. Как величины $\nu_j^{(1)}$, так и величины $\nu_j^{(2)}$ независимы между собой, величины $\nu_j^{(1)}$ распределены по закону Пуассона с параметрами $P_1(\widetilde{B}_j)$, а величины $\nu_j^{(2)}$ распределены по закону Пуассона с параметрами $P_2(\widetilde{B}_j)$. Рассмотрим величины

$$\theta_1^{(N)} = \sum_{j=1}^{k_N}\frac{P_2(\widetilde{B}_j)-P_1(\widetilde{B}_j)}{P_1(\widetilde{B}_j)}\,\nu_j^{(1)};\quad \theta_2^{(N)} = \sum_{j=1}^{k_N}\frac{P_2(\widetilde{B}_j)-P_1(\widetilde{B}_j)}{P_1(\widetilde{B}_j)}\,\nu_j^{(2)}.$$

Легко подсчитать:

$$\mathbf{E}(\theta_2^{(N)}-\theta_1^{(N)}) = \mathbf{D}\theta_1^{(N)} = \sum_{j=1}^{k_N}\frac{(P_2(\widetilde{B}_j)-P_1(\widetilde{B}_j))^2}{P_1(\widetilde{B}_j)},$$

$$\frac{1}{4}\,\mathbf{D}\theta_1^{(N)} \leqslant \mathbf{D}\theta_2^{(N)} \leqslant \frac{9}{4}\,\mathbf{D}\theta_2^{(N)}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|\theta_1^{(N)}-\mathbf{E}\theta_1^{(N)}|}{\sqrt{\mathbf{D}\theta_1^{(N)}}} < \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{D}\theta_1^{(N)}}\right\} \geqslant 1-\frac{4}{\mathbf{D}\theta_1^{(N)}} \geqslant 1-\frac{4}{N}, \qquad (4.13)$$

а

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|\theta_2^{(N)} - \mathbf{E}\theta_1^{(N)}|}{\sqrt{\mathbf{D}\theta_1^{(N)}}} < \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{D}\theta_1^{(N)}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{|\theta_2^{(N)} - \mathbf{E}\theta_2^{(N)}| > \frac{1}{2}\mathbf{D}\theta_1^{(N)}\right\} \leqslant \frac{4\mathbf{D}\theta_2^{(N)}}{[\mathbf{D}\theta_1^{(N)}]^2} \leqslant \frac{9}{N} \qquad (4.14)$$

(мы воспользовались неравенством Чебышева). Это же невозможно, если $\mu_{\xi_2(t)}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\xi_1(t)}$. Теорема А полностью доказана.

Замечание к теореме А. Если мы проследим доказательство необходимости условий теоремы. А, то убедимся, что, при нарушении хотя бы одного из условий А.1, А.2.2, А.2.3, А.2.4, меры $\mu_{\xi_1(t)}$ и $\mu_{\xi_2(t)}$ будут сингулярны одна по отношению к другой (ср. 3.3).

§ 5. Формулы для плотности меры $\mu_{\xi_2(t)}$ относительно меры $\mu_{\xi_1(t)}$

Рассмотрим сначала несколько частных случаев.

5.1. Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ определяются характеристической функцией (2.5). Если $\rho(t, u)$ — плотность меры P_2 относительно P_1, то-есть, если $\widetilde{A} \subset [0, 1] \times R^{(m)}$

$$P_2(\widetilde{A}) = \int\limits_{[t;\, u] \in \widetilde{A}} \rho(t, u)\, P_1(dt \times du),$$

из формулы (2.6) следует, что

$$\frac{d\mu_{\xi_2(t)}}{d\mu_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t)) = \prod_{j=1}^{\nu} \rho(\tau_j, u_j),$$

где $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ все точки, для которых $u_j = \xi_1(\tau_j + 0) - \xi_1(\tau_j - 0) \neq 0$. Предположим, что $\mathbf{P}\{\rho(\tau_j, u_j) = 0\} = 0$ для всех j, т. е. $\rho(t, u)$ почти всюду относительно меры P_1 положительна. Тогда имеет смысл выражение

$$\log \frac{d\mu_{\xi_2(t)}}{d\mu_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t)) = \sum_{j=1}^{\nu} \log \rho(\tau_j, u_j).$$

Если обозначить ν_T число скачков $\xi_1(t)$, происшедших до момента T, то

$$\log \frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t)) = \sum_{j=1}^{\nu_T} \log \rho(\tau_j, u_j), \quad \text{а} \quad \xi_1(T) = \sum_{j=1}^{\nu_T} u_j.$$

Таким образом, процесс в $R^{(m+1)}$,

$$\chi(T) = \left[\log \frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t));\ \ \xi_1(T)\right]$$

характеристическая функция которого полностью определяет плотность меры $\mu_{\xi_2(t)}$ относительно меры $\mu_{\xi_1(t)}$, будет процессом с независимыми приращениями, так как его скачки происходят в тех же точках, в которых произошли скачки процесса $\xi_1(t)$, и сами эти скачки независимы

между собой. Характеристическую функцию процесса $\chi(T)$ можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{E}\exp\left\{i\alpha\frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t)) + i(z, \xi_1(t))\right\} =$$

$$= \exp\left\{\int\limits_{t\leqslant T}(e^{i\alpha\log\rho(t,u)+i(z,u)} - 1)\,P_1(dt\times du)\right\}. \tag{5.1}$$

5.2. Рассмотрим теперь случай, когда $0 < P_1([0,1]\times R^{(m)}) < \infty$, а $P_2([0,1]\times R^{(m)}) = 0$. Очевидно, что

$$\frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t)) = 0,$$

если $\xi_1(t)$ имеет хотя бы один скачок при $t\leqslant T$. Соотношение $\frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t)) \neq 0$ имеет место лишь в том случае, когда $\xi_1(t) = 0$ для $t\leqslant T$. Вероятность осуществления этого события для процесса $\xi_2(t)$ равна 1, а для процесса $\xi_1(t)$, поскольку число скачков распределено по закону Пуассона с параметром

$$\int\limits_{t\leqslant T} P_1(dt\times du),$$

вероятность того, что не произойдет ни одного скачка, будет равна

$$\exp\left\{-\int\limits_{t\leqslant T} P_1(dt\times du)\right\}.$$

Поэтому

$$\frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t)) = \begin{cases}\exp\left\{\int\limits_{t\leqslant T} P_1(dt\times du)\right\}, & \text{если } \xi_1(t)=0 \text{ для } t\leqslant T,\\ 0 & \text{для всех остальных } \xi_1(t).\end{cases} \tag{5.2}$$

5.3. Пусть теперь $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — нормальные процессы, удовлетворяющие условиям теоремы 3.1. Рассмотрим величины

$$x^{(1)}_{n,1},\ x^{(1)}_{n,2},\ \ldots,\ x^{(1)}_{n,n} \quad\text{и}\quad x^{(2)}_{n,1},\ x^{(2)}_{n,2},\ \ldots,\ x^{(2)}_{n,n},$$

введенные нами при доказательстве 3.1.

Пусть $x^{(1)}_n(t) = \sum\limits_{k\leqslant t(n+1)} x^{(1)}_{n,k}$; $x^{(2)}_n(t) = \sum\limits_{k\leqslant t(n+1)} x^{(2)}_{n,k}$.

Положим

$$\psi_{n,k} = \log\left(1 \pm \frac{\left(\Delta\left(\frac{k}{n}\right) - \Delta\left(\frac{k-1}{n}\right),\ e^{(j)}_{n,k}\right)\sqrt{m}}{\sqrt{\lambda^{(j)}_{n,k}}}\right),$$

если $x^{(1)}_{n,k} = a_1\left(\frac{k}{n}\right) - a_1\left(\frac{k-1}{n}\right) \pm \sqrt{m\lambda^{(j)}_{n,k}}\, e^{(j)}_{n,k}$.

Рассмотрим процесс

$$\chi_n(T) = \left[\log\frac{d\mu^T_{x^{(2)}_n(t)}}{d\mu^T_{x^{(1)}_n(t)}}(x^{(n)}_1(t));\ x^{(1)}_n(T)\right].$$

Очевидно,

$$\chi_n(T) = \sum_{k \leqslant (n+1)T} \left[\psi_{n,k};\ x^{(1)}_{n,k}\right],$$

и используя теорему, сформулированную во введении, легко убедиться, что конечномерные распределения процессов $\chi_n(T)$ сходятся к конечномерным распределениям некоторого процесса $\chi(T)$, характеристическая функция которого будет совпадать на основании 1.5 с характеристической функцией процесса

$$\left[\frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t));\ \xi_1(T)\right].$$

Эта характеристическая функция, как не трудно подсчитать, будет иметь вид:

$$\mathbf{E}\exp\left\{i\alpha\frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t)) + i(z, \xi_1(t))\right\} =$$

$$= \exp\left\{i(z, a_1(T)) - \frac{1}{2}(\mathcal{A}_1(T)z, z) - \frac{i\alpha}{2}\int_0^T ([d\mathcal{A}_1(t)]\,p(t),\ p(t)) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\alpha^2\int_0^T ([d\mathcal{A}_1(t)]\,p(t),\ p(t)) + i\alpha(z, \Delta(T))\right\}.$$

Для подсчета этой характеристической функции нужно найти $\mathbf{E}\psi_{n,k}$, $\mathbf{D}\psi_{n,k}$ и $\mathbf{E}\left[(\psi_{n,k} - \mathbf{E}\psi_{n,k})\left(z, x^{(1)}_{n,k} - a_1\left(\frac{k}{n}\right) + a_1\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\right]$ и убедиться, что

$$\sum_{k \leqslant (n+1)T} \mathbf{E}\,\psi_{n,k} \to -\frac{1}{2}\int_0^T ([d_t\mathcal{A}_1(t)]\,p(t),\ p(t));$$

$$\sum_{k \leqslant (n+1)T} \mathbf{D}\psi_{n,k} \to \int_0^T ([d\mathcal{A}_1(t)]\,p(t),\ p(t));$$

$$\sum_{k \leqslant (n+1)T} \mathbf{E}\left[(\psi_{n,k} - \mathbf{E}_1\psi_{n,k})\left(z, x^{(1)}_{n,k} - a_1\left(\frac{k}{n}\right) + a_1\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]\right. \to (z, \Delta(t)).$$

5.4. Рассмотрим далее случай, когда для процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ выполнено условие А.2.1, $|\rho(t, u) - 1| \leqslant \frac{1}{2}$, $\Delta(t) = 0$,

$$\int\limits_{\substack{(u, u) > 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1}} P_1(dt \times du) = 0,$$

а также выполнено условие А.2.3. Пусть две последовательности серий, независимых в каждой серии величин $x^{(1)}_{n,1}, x^{(1)}_{n,2}, \ldots, x^{(1)}_{n,n}$ и $x^{(2)}_{n,1}, x^{(2)}_{n,2}, \ldots, x^{(2)}_{n,n}$, определяются равенствами (4.4) — (4.8). Как уже указывалось при доказательстве a_3), конечномерные распределения процессов $\xi^{(n)}_1(t) = \sum\limits_{t_{n,j} \leqslant t} x^{(1)}_{n,j}$ и $\xi^{(n)}_2(t) = \sum\limits_{t_{n,j} \leqslant t} x^{(2)}_{n,j}$ сходятся соответственно к конечно-

мерным распределениям процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Положим

$$\chi_n(T) = \left[\log \frac{d\mu^T_{\xi_2^{(n)}(t)}}{d\mu^T_{\xi_1^{(n)}(t)}}(\xi_1^{(n)}(t));\ \xi_1^{(n)}(T)\right].$$

Легко видеть, что

$$\chi_n(T) = \sum_{t_{n,j}\leqslant t} (\psi_{n,j},\ x^{(1)}_{n,j}),$$

где $\psi_{n,j} = \log(1+\varphi_{n,j})$, а $\varphi_{n,j}$ определяются формулой (4.9). Из (4.9) и того, что $|\rho(t,u)-1| \leqslant \frac{1}{2}$ следует, что

$$\mathbf{P}\left\{|\varphi_{n,j}| \leqslant \frac{1}{2}\right\} = 1. \text{ Поэтому при } r \geqslant 2$$

$$|\mathbf{E}(\varphi_{n,j})^r| \leqslant \mathbf{D}\varphi_{n,j}\cdot\frac{1}{2^{r-2}},$$

и поскольку

$$\sum_{t_{n,j}\leqslant t} \mathbf{E}(\varphi_{n,j})^r \to \int_{\tau\leqslant t} [\rho(\tau,u)-1]^r P_1(d\tau\times du),$$

то

$$\sum_{t_{n,j}\leqslant t} \mathbf{E}\psi_{n,j} \to \int_{\tau\leqslant t} [\log\rho(\tau,u) - \rho(\tau,u)+1] P_1(d\tau\times du).$$

Применяя теорему, сформулированную во введении и 1.5, можем получить следующее утверждение:

При $n\to\infty$ конечномерные распределения процесса $\chi_n(T)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса с независимыми приращениями

$$\left[\log\frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t));\xi_1(T)\right],$$

характеристическая функция последнего определяется формулой:

$$\mathbf{E}\exp\left\{i\alpha\frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1(t)}}(\xi_1(t)) + i(z,\xi_1(t))\right\} =$$

$$= \exp\left\{i\alpha\int_{t\leqslant T}[\log\rho(t,u)-\rho(t,u)+1]P_1(dt\times du) + i(z,a_1(T)) +\right.$$

$$\left. + \int_{t\leqslant T}(e^{i\alpha\log\rho(t,u)+i(z,u)} - 1 - i(z,u) - i\alpha\log\rho(t,u))P_1(dt\times du)\right\}.$$

Сформулируем теперь общую теорему,

Теорема Б. *Пусть выполнены условия теоремы А. Обозначим через* $\widetilde{B}$ *множество всех пар* $[t,u]$, *для которых* $\rho[t,u]=0$, *а через* $\mathfrak{A}_T$ *множество всех функций* $x(t)$, *для которых существуют такие точки* $\tau\leqslant T$, *что пара* $[\tau; x(\tau+0)-x(\tau-0)]$ *будет принадлежать* $\widetilde{B}$. *Тогда*

$$\frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1(t)}}(x(t)) = \begin{cases} 0, & \text{если } x(t)\in\mathfrak{A}_T, \\ \exp\left\{\int\limits_{\substack{\tau\leqslant T\\ [\tau,u]\in\widetilde{B}}} P_1(d\tau\times du)\right\}\frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1^*(t)}}(x(t)), & \text{если } x(t)\overline{\in}\,\mathfrak{A}_T, \end{cases}$$

и процесс $\xi_1^*(t)$ *задается формулой* (4.1), *где вместо меры* P_1 *стоит мера* $P_1^*(\widetilde{A}) = P_1(\widetilde{A} \setminus \widetilde{B})$, *а вместо* $a_1(t)$ *функция* $a_1^*(t)$,

$$a_1^*(t) = a_1(t) - \int\limits_{\substack{(u,\,u)\leqslant 1\\ \tau\leqslant t\\ [\tau;\,u]\,\in\,\widetilde{B}}} u P_1(d\tau \times du).$$

Характеристическая функция процесса $\left[\log \frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1^*(t)}}(\xi_1^*(t));\ \xi_1^*(T)\right]$ *определяется формулой:*

$$\mathbf{E}\exp\left\{i\alpha \log \frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1^*(t)}}(\xi_1^*(t)) + i(z, \xi_1^*(t))\right\} = \exp\left\{-\frac{i\alpha}{2}\int\limits_0^T ([d_t\mathcal{A}_1(t)]\,p(t),\ p(t)) + \right.$$

$$+ i\alpha \int\limits_{\substack{t\leqslant T\\ |\,\rho(t,\,u)-1\,|\,\leqslant\frac{1}{2}}} [\log \rho(t, u) - \rho(t, u) + 1]\, P_1(dt \times du) -$$

$$- \frac{\alpha^2}{2}\int\limits_0^T ([d\mathcal{A}_1(t)]\,p(t),\ p(t)) - \frac{1}{2}(\mathcal{A}_1(T)\,z,\ z) + i\alpha(z,\ \Delta(T)) +$$

$$+ i(z,\ a_1(T)) + \int\limits_{\substack{|\,\rho(t,\,u)-1\,|\,\leqslant\frac{1}{2}\\ (u,\,u)\leqslant 1;\ t\leqslant T}} [e^{i\alpha\log\rho(t,\,u)+i(z,\,u)} - 1 - i\alpha\log\rho(t, u) - i(z, u)] \times$$

$$\times P_1(dt \times du) + \left.\int\limits_{\substack{t\leqslant T\\ \{|\,\rho(t,\,u)-1\,|\,>\frac{1}{2}\}\cup\{(u,\,u)>1\}}} [e^{i\alpha\log\rho(t,\,u)+i(z,\,u)} - 1]\, P_1^*(dt\times du)\right\}.$$

Доказательство теоремы Б. Представим процесс $\xi_1(t)$ в виде суммы четырех процессов, независимых между собой:

$$\xi_1(t) = \xi_{11}(t) + \xi_{12}(t) + \xi_{13}(t) + \xi_{14}(t),$$

причем

$$\mathbf{E}e^{(z,\,\xi_{11}(t))} = \exp\left\{\int\limits_{\substack{\tau\leqslant t\\ [\tau;\,u]\,\in\,\widetilde{B}}} (e^{i(z,\,u)} - 1)\, P_1(d\tau\times du)\right\},$$

$$\mathbf{E}e^{(z,\,\xi_{12}(t))} = \exp\left\{\int\limits_{\substack{(u,\,u)\leqslant 1\\ |\,\rho(\tau,\,u)-1\,|\,\leqslant\frac{1}{2};\ \tau\leqslant t}} (e^{i(z,\,u)} - 1 - i(z, u))\, P_1(d\tau\times du)\right\},$$

$$\mathbf{E}(e^{(z,\,\xi_{13}(t))} = \exp\left\{\int\limits_{\substack{(u,\,u)>1\\ \tau\leqslant t}} (e^{i(z,\,u)} - 1)\, P_1^*(d\tau\times du) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\substack{(u,\,u)\leqslant 1\\ |\,\rho(\tau,\,u)-1\,|\,>\frac{1}{2},\ \tau\leqslant t}} (e^{i(z,\,u)} - 1)\, P_1^*(d\tau\times du)\right\};$$

$$\mathbf{E}e^{(z,\,\xi_{11}(t))} = \exp\left\{i\,(a_1^*(t),\,z) - i \int\limits_{\substack{(u,\,u)\leqslant 1\\ |\,\rho\,(\tau,\,u)-1\,|>\frac{1}{2}\,,\,\tau\leqslant t}} (u,\,z)\,P_1\,(d\tau\times du) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\,(\mathcal{A}_1\,(t)\,z,\,z)\right\}.$$

Процесс $\xi_2\,(t)$ также представим в виде суммы четырех независимых между собой процессов:

$$\xi_2\,(t) = \xi_{21}\,(t) + \xi_{22}\,(t) + \xi_{23}\,(t) + \xi_{24}\,(t),$$

где процесс $\xi_{21}\,(t)$ с вероятностью 1 тождественно равен 0, а остальные процессы задаются своими характеристическими функциями:

$$\mathbf{E}e^{(z,\,\xi_{22}(t))} = \exp\left\{i \int\limits_{\substack{(u,\,u)\leqslant 1\\ |\,\rho\,(\tau,\,u)-1\,|\leqslant\frac{1}{2},\,\tau\leqslant t}} [\rho\,(\tau,\,u) - 1]\,(z,\,u)\,P_1\,(d\tau\times du) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\substack{(u,\,u)\leqslant 1\\ |\,\rho\,(\tau,\,u)-1\,|\leqslant\frac{1}{2};\,\tau<t}} (e^{i(z,\,u)} - 1 - i\,(z,\,u))\,P_2\,(d\tau\times du)\right\},$$

$$\mathbf{E}e^{(z,\,\xi_{23}(t))} = \exp\left\{\int\limits_{\substack{(u,\,u)>1\\ \tau\leqslant t}} (e^{i(z,\,u)} - 1)\,P_2\,(d\tau\times du) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\substack{(u,\,u)\leqslant 1\\ |\,\rho\,(\tau,\,u)-1\,|>\frac{1}{2},\,\tau\leqslant t}} (e^{i(z,\,u)} - 1)\,P_2\,(d\tau\times du)\right\};$$

$$\mathbf{E}e^{(z,\,\xi_{24}(t))} = \exp\left\{i\,(a_2,\,z) - i \int\limits_{\substack{(u,\,u)\leqslant 1\\ |\,\rho\,(\tau,\,u)-1\,|>\frac{1}{2},\,\tau\leqslant t}} (z,\,u)\,P_2\,(d\tau\times du) - \right.$$

$$\left. - i \int\limits_{\substack{(u,\,u)\leqslant 1\\ |\,\rho(\tau,\,u)-1\,|\leqslant\frac{1}{2},\,\tau\leqslant t}} (z,\,u)\,[\rho\,(\tau,\,u) - 1]\,P_1\,(d\tau\times du) - \frac{1}{2}\,(\mathcal{A}_1\,(t)z,\,z)\right\}.$$

В пунктах 5.1.—5.4 мы нашли $\dfrac{d\mu^T_{\xi_{2j}(t)}}{d\mu^T_{\xi_{1j}(t)}}\,(\xi_{1j}\,(t))$. Для доказательства теоремы остается воспользоваться соотношением:

$$\frac{d\mu^T_{\xi_2(t)}}{d\mu^T_{\xi_1(t)}}\,(\xi_1\,(t)) = \prod_{j=1}^{4} \frac{d\mu^T_{\xi_{2j}(t)}}{d\mu^T_{\xi_{1j}(t)}}\,(\xi_{1j}\,(t))$$

(ср. доказательство 1.3). Теорема доказана.

Поступила в редакцию
14.4.57

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Сакс, Теория интеграла, ИИЛ, М. 1949.
[2] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, М.— Л., 1936.
[3] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом. Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике, УМН, **11**, вып. 1 (1956), 77—114.
[4] Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теор. вероятн. и ее прим., **1**, вып. 2 (1956), 177—238.
[5] Б. В. Гнеденкс, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949.
[6] Н. И Ахиезер, И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М.— Л., 1950.

ON THE DIFFERENTIABILITY OF MEASURES WHICH CORRESPOND TO STOCHASTIC PROCESSES

I. PROCESSES WITH INDEPENDENT INCREMENTS

A. V. SCOROHOD (*KIEV*)

(*Summary*)

Kolmogorov (see [2] pg. 39) has proved that for each stochastic process there exists a corresponding unique measure on the minimal Borel's field containing all cylindrical sets of the space of all functions.

Let $\xi_1(t)$ and $\xi_2(t)$ be processes with independent increments and μ_1 and μ_2 — measures corresponding to these processes. In this paper the conditions for which the measure μ_2 is absolutely continuous with respect to measure μ_1, are investigated (Theorem A), and the density of the measure μ_2 with respect to the measure μ_1 is calculated (Theorem Б).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4
1957

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЛИНА — СТИЛЬТЬЕСА В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В. М. ЗОЛОТАРЕВ

Аппарат характеристических функций с момента его успешного применения А. М. Ляпуновым до настоящего времени остается одним из основных аналитических методов теории вероятностей. Однако будучи очень удобным при исследовании вопросов аддитивного характера (т. е. там, где мы имеем дело с суммами случайных величин), он становится мало пригодным в применении к задачам, в которых мы встречаемся с произведениями и отношениями случайных величин. Вместе с тем к задачам второго рода оказывается хорошо приспособленным аппарат преобразований Меллина — Стильтьеса.

Настоящая статья состоит из двух разделов. Первый раздел содержит некоторые общие соображения и результаты по применению этих преобразований. В частности, устанавливается зависимость между преобразованиями Меллина — Стильтьеса, односторонними преобразованиями Лапласа — Стильтьеса и характеристическими функциями данного распределения. Второй раздел посвящен изучению некоторых предельных и точных зависимостей в классе устойчивых распределений. Оказывается, что при специальном выборе параметра смещения γ удается найти явное выражение для преобразования Меллина плотности устойчивых распределений с $\alpha \neq 1$. Необходимость специального выбора параметра γ объясняется тем, что существует естественное разбиение устойчивого распределения на две аналитически самостоятельные ветви (точкой разделения ветвей после нужного подбора γ служит точка $x = 0$). Явно выписываемые через функции $\Gamma(x)$ преобразования Меллина для этих ветвей позволяют установить целую серию зависимостей между ветвями устойчивых распределений, включающую в качестве частных случаев все ранее известные зависимости того же типа (как, например, приводившееся в [6] представление ветвей устойчивых распределений с параметрами $\alpha > 1$ с помощью ветвей распределений, определяемых параметрами $\alpha < 1$). Во втором разделе исследуется также поведение устойчивых распределений вблизи критических точек $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

Считаю своим долгом поблагодарить Ю. В. Прохорова, прочитавшего рукопись и сделавшего ряд ценных замечаний.

РАЗДЕЛ 1

Общие соображения

1.1 Определение преобразования Меллина — Стильтьеса и его основные свойства. *На протяжении всего первого раздела мы будем предполагать, что распределения, с которыми нам придется иметь дело, непрерывны в нуле.* Это ограничение позволяет значительно упростить изложение материала и вместе с тем почти всегда может быть снято без сколько-нибудь существенного изменения проводимых рассуждений.

Преобразованием Меллина — Стильтьеса функции распределения $F(x)$ мы будем называть интеграл

$$\mathfrak{R}(s) = \int_0^\infty x^s \, dF(x),$$

очевидно, существующий для всех значений параметра s из некоторой полосы $\mathfrak{D} = \{s : \sigma_1 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant \sigma_2\}$, содержащей мнимую ось и, возможно, вырождающейся в эту ось.

Функция $\mathfrak{R}(s)$ в полосе $\mathfrak{D}$ полностью определяет функцию $F(x)$ на положительной полуоси. Это вытекает хотя бы из того, что характеристическая функция связанного с $F(x)$ распределения

$$G(x) = \frac{F(e^x) - F(0)}{1 - F(0)}$$

(тривиальный случай $F(0) = 1$ мы исключаем) равна, как легко видеть, $\mathfrak{R}(it)\,\mathfrak{R}^{-1}(0)$. Если к тому же полоса $\mathfrak{D}$ не вырождается в мнимую ось, то функция $\mathfrak{R}(s)$ может рассматриваться как двустороннее преобразование Лапласа — Стильтьеса функции $F(e^x)$. Поэтому для построения формулы обращения преобразования Меллина — Стильтьеса мы можем, в частности, использовать хорошо известную формулу обращения для характеристических функций, которой мы предварительно придадим несколько иную форму. Именно, можно показать, что для любой функции распределения $H(x)$ с характеристической функцией $g(t)$, в точках непрерывности функции H имеет место равенство

$$H(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im}\{g(t)\, e^{-itx}\} \, \frac{dt}{t}.$$

Отсюда для положительных точек непрерывности функции $F(x)$ получаем

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{R}(0) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im}\{\mathfrak{R}(it)\, x^{-it}\} \, \frac{dt}{t}.$$

Важнейшим свойством преобразований Меллина — Стильтьеса является следующее: Если $\mathfrak{R}_1(s)$ и $\mathfrak{R}_2(s)$ — какие-либо преобразования Меллина — Стильтьеса, соответствующие функциям распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$, то функция $\mathfrak{R}_1(s) \cdot \mathfrak{R}_2(s)$ в полосе $\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ будет преобразованием Меллина — Стильтьеса функции распределения $(x > 0)$

$$F(x) = \int_0^\infty F_1\left(\frac{x}{y}\right) dF_2(y) \qquad (1)$$

1.2. «Срезки» случайных величин. Срезкой случайной величины ξ с функцией распределения $F(x)$, не сосредоточенной целиком на отрицательной полуоси, мы будем называть любую случайную всличину $\widetilde{\xi}$ с функцией распределения

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(0)}{1 - F(0)}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Иногда бывает полезно рассматривать $\widetilde{\xi}$ как функцию случайной величины ξ. Возможность такого представления видна из приводимой ниже леммы. Через H_{-1} мы будем обозначать функцию, обратную к функции распределения $H(x)$, причем в интервалах $[a_i, b_i]$, где эта функция не определена, мы так доопределяем ее, полагая в этих интервалах $H_{-1}(x) = H_{-1}(b_i + 0)$, чтобы она была непрерывна слева.

Лемма. *Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — произвольные функции распределения. Если случайная величина ξ имеет функцию распределения, равную $F(x)$, то случайная величина*

$$\eta = G_{-1}[F(\xi)]$$

имеет функцию распределения, равную $G(x)$.

Доказательство леммы укладывается в две строчки:

$$\mathbf{P}\{\eta < x\} = \mathbf{P}\{G_{-1}[F(\xi)] < x\} = \mathbf{P}\{F(\xi) < G(x)\} = \\ = \mathbf{P}\{\xi < F_{-1}[G(x)]\} = F(F_{-1}[G(x)]) = G(x).$$

Положив теперь $G(x) = \widetilde{F}(x)$, мы получаем на основании леммы

$$\widetilde{\xi} = \widetilde{F}_{-1}[F(\xi)] = F_{-1}\left(\frac{F(\xi) + c}{1 + c}\right), \text{ где } c = \frac{F(0)}{1 - F(0)}.$$

Это представление не единственное. Так, например, возможно представление $\widetilde{\xi} = Q(\xi)$, где

$$Q(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0 \\ F_{-1}\left[1 - \frac{1}{c} F(x)\right], & \text{если } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Распределение срезки $\widetilde{\xi}$ определяет, очевидно, лишь часть исходного распределения $F(x)$, однако распределения пары срезок $\widetilde{\xi}$ и $(-\widetilde{\xi})$ определяют его уже полностью.

Понятию срезок случайных величин будет сопутствовать понятие эквивалентности случайных величин. Две случайные величины ξ_1, ξ_2 мы будем называть эквивалентными и обозначать $\xi_1 \approx \xi_2$, если соответствующие им распределения совпадают. Соотношениям эквивалентности присущи многие черты обычных равенств. Так, их можно почленно складывать, умножать, делить, если совместные распределения из левых частей совпадают с совместными распределениями величин из правых частей (последняя операция, впрочем, теряет смысл, если в знаменатель попадают случайные величины, принимающие нулевое значение с положительной вероятностью). В дальнейшем мы будем иметь дело с независи-

мыми случайными величинами, так что условие совпадения совместных распределений будет выполняться автоматически. Приведем некоторые свойства срезок.

1°. *Если* a *— положительная постоянная, то* $(\widetilde{a\xi}) \approx \widetilde{\xi} \cdot a$.

2°. *Если* $\xi_1 \approx \xi_2$, *то* $\widetilde{\xi}_1 \approx \widetilde{\xi}_2$.

3°. *Если* $\widetilde{\xi}_1 \approx \widetilde{\xi}_2$ *и* $(\widetilde{-\xi_1}) \approx (\widetilde{-\xi_2})$, *то* $\xi_1 \approx \xi_2$.

4°. *Пусть* ξ_t *при* $t \to 0$ *сходится в каком-либо смысле к* ξ (*по вариации, в смысле сильной или слабой сходимости*), *тогда* $\widetilde{\xi}_t$ *также сходится в том же смысле* $\widetilde{\xi}$.

5°. *Для всех значений* s *из полосы* $\mathfrak{D}$

$$\mathbf{M}\widetilde{\xi}^s = \frac{\Re(s)}{\Re(0)}.$$

6°. *Пусть* $V(x)$ *— любая функция, определенная на всей действительной оси, тогда*

$$\mathbf{M}V(\xi) = \mathbf{P}\{\xi > 0\}\,\mathbf{M}V(\widetilde{\xi}) + \mathbf{P}\{\xi < 0\} \cdot \mathbf{M}V(-(\widetilde{-\xi})).$$

7°. *Если* ξ *— неотрицательная случайная величина, то* $\widetilde{\xi} \approx \xi$.

8°. *Если распределение случайной величины квазисимметрично, т. е.* $cF(-x+0) = 1 - F(x)$, *где* $0 < c < \infty$, *то*

$$\widetilde{\xi} \approx \xi_1.$$

9°. *Если срезки* ξ *рассматривать как функции соответствующих им случайных величин* ξ, *то из независимости случайных величин следует независимость их срезок.*

1.3 Связь основных интегральных преобразований. Кроме характеристических функций $f(t)$ и введенных выше функций $\Re(s)$, мы будем рассматривать также односторонние преобразования Лапласа — Стильтьеса функций распределения $F(x)$

$$\Pi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x).$$

Преобразование $\Pi(s)$, очевидно, существует для всех комплексных s из полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ и представляет там аналитическую функцию. В частности, всегда существует

$$\Pi^{(k)}(s) = (-1)^k \int_0^\infty e^{-sx}\,x^k\,dF(x). \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что функция $\dfrac{\Pi(s)}{\Pi(0)}$ имеет смысл $\mathbf{M}\exp\{-s\widetilde{\xi}\}$.

Далее выясняется взаимная связь этих трех наиболее важных преобразований. При этом функции $\Re(s)$ и $\Pi(s)$, естественно, должны однозначно определять друг друга и обе, в свою очередь, однозначно определяться по характеристической функции $f(t)$. Вместе с тем однозначное определение $f(t)$ по какой-либо из этих функций, вообще говоря, невозможно, поскольку как $\Re(s)$, так и $\Pi(s)$ определяют только часть исходного распределения $F(x)$.

Теорема 1. *Пусть функция* $\Re(s)$ *определена в полосе* $\mathfrak{D} = \{s : \sigma_1 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant \sigma_2\}$ *и* k *— любое целое неотрицательное число, не превосходящее*

$[\sigma_2]$*, *тогда в полосе* $\sigma_1 - k \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant \sigma_2 - [\sigma_2]$ *справедливо следующее равенство*

$$\Re(k+s) = \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(1-s)} \int_0^\infty x^{-s} \Pi^{(k+1)}(x)\, dx. \tag{3}$$

В частности, при $k = 0$

$$\Re(s) = \frac{(-1)}{\Gamma(1-s)} \int_0^\infty x^{-s} \Pi'(x)\, dx. \tag{4}$$

Доказательство. Подставляем в интеграл (3) выражение функции $\Pi^{(k)}(x)$ в соответствии с (2) и после небольших преобразований убеждаемся, что он дает нам представление функции $\Re(k+s)$.

Замечание. Легко видеть, что функция $\Pi\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \Pi^{-1}(0)$ является функцией распределения, если ее положить равной нулю на отрицательной полуоси. Это позволяет сформулировать свойство (4) в терминах эквивалентных случайных величин. Пусть независимые случайные величины ξ и η имеют соответственно функции распределения $F(x)$ и $1 - e^{-x}$, $(x \geqslant 0)$, а случайная величина ζ функцию распределения равную $\Pi\left(\frac{1}{x}\right)\Pi^{-1}(0)$, ($\Pi$ строится по $F(x)$). Тогда

$$\widetilde{\xi \cdot \eta^{-1}} \approx \zeta. \tag{5}$$

В качестве одного из применений теоремы 1 укажем на следующее формальное представление функции $F(x)$ на положительной полуоси с помощью функции Π и ее производных:

$$F\left(x^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_n}{n!} \varepsilon^n \left(x \frac{d}{dx}\right)^n \Pi\left(x^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) =$$

$$= F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_n}{n!} \left[P_n\left(x \frac{d}{dx}\right) \Pi\left(x^{\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right] \varepsilon^n, \tag{6}$$

где ε — любое действительное число, не превосходящее по абсолютной величине единицы, $\chi_n = [\Gamma^{-1}(x)]^{(n)}_{x=1} \cdot (-1)^n$ и $P_n\left(x \frac{d}{dx}\right) = a_n x^n \frac{d^n}{dx^n} + \ldots$ $\ldots a_1 x \frac{d}{dx} + a_0$. Полиномы $P_n(z)$ определяются рекуррентным соотношением

$$P_{n+1}(z) = zP_n(z) + zP_n'(z), \quad n \geqslant 0; \quad P_0(z) \equiv 1.$$

Производящая функция $U(z, u)$ полиномов $P_n(z)$, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$U(z, u) = \exp\{z(e^u - 1)\},$$

откуда видно, что полином $P_n(z)$ есть не что иное, как момент n-го порядка пуассоновского распределения с шагом 1 и средним значением $\lambda = z$.

Мы подчеркнули формальность этого представления потому, что в большинстве случаев ряд, стоящий в правой части равенства (6), оказывается расходящимся и, значит, это представление надо понимать либо

* [ ] означает — целая часть числа.

в смысле какой-то суммируемости, либо как асимптотическое. В разделе 2 будет приведен пример построения асимптотического разложения по типу формулы (6).

Формальные рассуждения при построении представления (6) сводятся к следующему. В равенстве (4) функция $\Gamma^{-1}(1-s)$ разлагается в ряд по степеням s, после чего делается замена s на $-\varepsilon s$ и проводится интегрирование по частям в каждом слагаемом

$$\Re(-\varepsilon s) = -\int_0^\infty x^s\, dF\left(x^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n}{n!}\varepsilon^n(-s)^n \int_0^\infty x^s\, d\Pi\left(x^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_n}{n!}\varepsilon^n \int_0^\infty x^s\, d\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \Pi\left(x^{\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right].$$

Формальное обращение преобразования Меллина — Стильтьеса приводит к разложению (6).

Если функции $F(x)$ и $\Pi(x)$ сами оказываются зависимыми от параметра ε, то при некоторых дополнительных ограничениях на характер такой зависимости в терминах функций — коэффициентов ряда (6) можно показать, что это представление является асимптотическим. Рассуждения такого типа будут проводиться в разделе 2 (теорема 6). Здесь мы ограничимся разбором самого простого случая — сближением с первым членом представления.

Теорема 1а. *Если функция распределения* $F(x, \varepsilon)$ *зависит от* ε *таким образом, что соответствующая ей функция* $\Pi\left(x^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \varepsilon\right)\Pi^{-1}(0, \varepsilon)$ *слабо сходится к* $H(x)$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то и* $\widetilde{F}\left(x^{\frac{1}{\varepsilon}}, \varepsilon\right)$ *также слабо сходится к функции* $H(x)$, $(x > 0)$.

Действительно, согласно (5).

$$\Pi\left(x^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \varepsilon\right)\cdot\Pi^{-1}(0, \varepsilon) = \mathbf{P}\left\{\frac{\widetilde{\xi}_\varepsilon^\varepsilon}{\eta^\varepsilon} < x\right\},$$

где $\widetilde{\xi}_\varepsilon$ и η — независимые случайные величины с функциями распределения, соответственно равными $\widetilde{F}(x, \varepsilon)$ и $1 - e^{-x}$, $x \geqslant 0$. По условию теоремы, при $\varepsilon \to 0$ $\mathbf{P}\left\{\frac{\widetilde{\xi}_\varepsilon^\varepsilon}{\eta^\varepsilon} < x\right\} \Rightarrow H(x)$, ($\Rightarrow$ — знак слабой сходимости). С другой стороны, η^ε сходится по вероятности к единице при $\varepsilon \to 0$ и, следовательно,

$$\widetilde{F}\left(x^{\frac{1}{\varepsilon}}, \varepsilon\right) = \mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_\varepsilon^\varepsilon < x\} \Rightarrow H(x).$$

Следующая теорема дает зависимость функций $\Pi(s)$ и $\Re(s)$ от соответствующей им характеристической функции $f(t)$.

Теорема 2. 1°. *Для значений* s *и* s_0 *из положительной полуплоскости справедлива формула* *

$$\Pi(s) - \Pi(s_0) = \frac{1}{2\pi}\int f(t)\frac{s_0 - s}{(s_0 + it)(s + it)}\, dt. \qquad (7)$$

* Здесь и далее, если пределы интеграции не проставлены, то интегрирование проводится по всей вещественной оси.

2°. *Для значений s из интервала $l_1 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant l_2$ ($l_1 = \max(\sigma_1, -1+\varepsilon)$, $l_2 = \min(\sigma_2, 1-\varepsilon)$; ε — произвольное > 0) имеет место равенство*

$$\Re(s) = \frac{\Gamma(1+s)}{2\pi i}\int (it)^{-s}\left\{f(t) - \frac{1}{1+it}\right\}\frac{dt}{t}, \tag{8}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Вычислим следующий абсолютно сходящийся при $s > 0$ интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int f(t)\frac{dt}{(s+it)^2} = \frac{1}{2\pi}\iint e^{itx}\frac{dF(x)}{(s+it)^2}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int dF(x)\int e^{itx}\frac{dt}{(s+it)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int 2\pi x(1+\operatorname{sgn} x)\,e^{-s|x|}\,dF(x) = \int_0^\infty xe^{-sx}\,dF(x) = -\Pi'(s).$$

Интегрируя полученное выражение в пределах от s_0 до s, получаем равенство (7). Из только что полученной формулы для $\Pi'(s)$ и равенства (4) имеем (s считаем пока вещественным):

$$\Re(s) = -\frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^\infty x^{-s}\Pi'(x)\,dx = \frac{1}{2\pi\Gamma(1-s)}\int_0^\infty\int f(t)\frac{x^{-s}}{(x+it)^2}\,dt\,dx.$$

Если понимать внутренний интеграл в смысле главного значения, то последнее выражение можно записать как

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int\left\{f(t) - \frac{1}{1+it}\right\}\frac{x^{-s}}{(x+it)^2}\,dt\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\Gamma(1-s)}\int_0^\infty\frac{x^{-s}}{(x+1)^2}\,dx\int (it)^{-s}\left\{f(t) - \frac{1}{1+it}\right\}\frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{\Gamma(1+s)}{2\pi i}\int (it)^{-s}\left\{f(t) - \frac{1}{1+it}\right\}\frac{dt}{t}.$$

Аналитическое продолжение по s завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. В том случае, когда распределение $F(x)$ целиком сосредоточено на положительной полуоси, то функция $\Pi(s)$ представляется с помощью $f(t)$ особенно просто:

$$\Pi(s) = f(is). \tag{9}$$

Замечание 2. Свойство срезок 6° позволяет выразить $\mathbf{M}|\xi|^s$ и $\mathbf{M}\exp\{-s|\xi|\}$ с помощью характеристической функции $f(t)$ случайной величины ξ. Именно,

$$\mathbf{M}|\xi|^s = \frac{\Gamma(1+s)}{\pi i}\int (it)^{-s}\left\{\operatorname{Re} f(t) - \frac{1}{1+it}\right\}\frac{dt}{t}, \quad (l_1 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant l_2)$$

$$\mathbf{M}\exp\{-s|\xi|\} = 1 - \frac{s}{2\pi i}\int\frac{1-\operatorname{Re} f(t)}{s+it}\cdot\frac{dt}{t}, \quad (\operatorname{Re} s \geqslant 0),$$

где оба интеграла понимаются в смысле главного значения.

1.4 Моменты дробно-логарифмического порядка. Из свойства 5° срезок видно, что функция $\Re(s)\cdot\Re^{-1}(0)$ дает нам значение момента порядка s случайной величины $\tilde{\xi}$. Таким образом, теорема 1, устанавливающая связь между моментами распределений $F(x)$ и $\Pi\left(\frac{1}{x}\right)\Pi^{-1}(0)$,

может быть использована для вычисления моментов дробного порядка срезок случайных величин. С другой стороны, если мы умеем находить моменты случайных величин $\widetilde{\xi}$ и $(-\widetilde{\xi})$, то, как видно из свойства срезок 6°, моменты $\mathbf{M}|\xi|^s$ и $\mathbf{M}|\xi|^s \operatorname{sgn}\xi$ находятся уже без труда. Действительно,

$$\mathbf{M}|\xi|^s \operatorname{sgn}^r\xi = \mathfrak{R}_\xi(s) + (-1)^r \mathfrak{R}_{(-\xi)}(s) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^\infty x^s \, d\Pi_r^*\left(\frac{1}{x}\right),$$

где $\Pi_r^*(x) = \Pi_\xi(x) + (-1)^r \Pi_{(-\xi)}(x)$; $r = 1,2$. Знание же явных выражений для моментов приведенного типа позволяет простым кратным дифференцированием по s этих выражений находить дробно-логарифмические моменты $\mathbf{M}|\xi|^s \log^n|\xi| \cdot \operatorname{sgn}^r\xi$, если они, конечно, вообще существуют, (n — целое, положительное). В частности, разлагая $\mathbf{M}|\xi|^s \operatorname{sgn}^r\xi$ в ряд по степеням s, мы получим

$$\mathbf{M}\log^n|\xi| \cdot \operatorname{sgn}^r\xi = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \chi_k p_{n-k}; \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $p_n = \int_0^\infty \log^n x \, d\Pi_r^*\left(\frac{1}{x}\right)$ и величины χ_n имеют тот же смысл, что и в (6). Так, например, при $n = 1$, $r = 2$ мы получаем

$$\mathbf{M}\log|\xi| = \int_0^\infty \log x \, d\Pi_2^*\left(\frac{1}{2}\right) - \mathbf{C},$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная Эйлера.

В качестве примера мы приведем вычисление моментов дробного порядка распределений $S_\alpha(x)$, выступающих в качестве предельных законов в теории ветвящихся случайных процессов с одним типом частиц. Известно (см. [3]), что для этих законов

$$\Pi(x) = 1 - x\left(1 + x^\alpha\right)^{-\frac{1}{\alpha}}; \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Применяя теорему 1, получаем

$$\mathfrak{R}(s) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{s}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{s}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma(1-s)}.$$

РАЗДЕЛ 2

Исследование аналитических свойств устойчивых законов

2.1. Определение и некоторые свойства устойчивых распределений. Хорошо известно, что устойчивые распределения образуют четырехпараметрическое семейство функций $F(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ с параметрами $0 < \alpha \leqslant 2$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, $-\infty < \gamma < \infty$, $\lambda > 0$ (такие значения параметров мы будем называть допустимыми). Задавать это семейство можно соответствующим ему семейством характеристических функций в форме, принятой в книге Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [1]:

$$\log f(t) = \begin{cases} it\gamma - \lambda|t|^\alpha\left\{1 - i\beta\frac{t}{|t|}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha\right\}, & \text{если } \alpha \neq 1 \\ it\gamma - \lambda|t|\left\{1 + i\beta\frac{2}{\pi}\frac{t}{|t|}\log|t|\right\}, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases} \tag{A}$$

Однако в большинстве рассматриваемых ниже вопросов оказывается удобнее исходить из другой формы характеристических функций, именно

$$\log f(t) = \begin{cases} it\gamma - \lambda |t|^{\alpha} \exp\left\{-i\frac{\pi}{2} K(\alpha)\beta \frac{t}{|t|}\right\}, & \text{если } \alpha \neq 1 \\ it\gamma - \lambda |t| \left\{1 + i\beta \frac{2}{\pi} \frac{t}{|t|} \log |t|\right\}, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases} \tag{B}$$

где $K(\alpha) = 1 - |1-\alpha|$ и параметры α, β, γ и λ имеют те же области изменения, что и в форме (А)*. Формулы перехода от одной формы к другой довольно просты и касаются, очевидно, только случая $\alpha \neq 1$:

$$\alpha_A = \alpha_B,\ \beta_A = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\alpha \cdot \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} K(\alpha)\beta_B\right],\ \gamma_A = \gamma_B,\ \lambda_A = \lambda_B \cos\left[\frac{\pi}{2} K(\alpha)\beta_B\right]. \tag{10}$$

При исследовании аналитических свойств устойчивых законов зачастую бывает достаточно ограничиться рассмотрением разнотипных распределений (т. е. принадлежащих к различным устойчивым типам), поскольку для обеих форм

$$F(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = F(\lambda^{-1/\alpha}(x - l),\ \alpha, \beta, 0, 1), \tag{11}$$

где $l = \gamma$, если $\alpha \neq 1$ и $l = \gamma + \frac{2}{\pi} \cdot \beta\lambda \log \lambda$, если $\alpha = 1$. Представителем каждого типа мы будем брать функцию $F(x, \alpha, \beta, 0, 1)$. Для плотностей мы введем обозначение $p(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$. Все эти обозначения, вообще говоря, будут относиться к форме (В). В тех же случаях, когда функции распределения и плотности или какие-нибудь связанные с ними величины будут соответствовать форме (А), они будут снабжаться подстрочными индексами «А», так, как это уже делалось в формулах (10).

Непосредственно из вида характеристической функции усматриваются кроме (11) также следующие ее свойства:

$$f(t, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = f(-t, \alpha, -\beta, -\gamma, \lambda), \tag{12}$$

$$f(t, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = f(c_1 t, \alpha, 1; 0, 1) \cdot f(c_2 t, \alpha, -1, 0, 1), \tag{13}$$

---

* В форме (А) есть небольшое изменение по сравнению с [1], — в случае $\alpha \neq 1$ перед $i\beta$ ставится минус, а не плюс. В этой форме предельным распределениям неотрицательных сумм случайных величин соответствует $\beta = 1$. В форме (В) гораздо удобнее тем же предельным распределениям приписывать значение β, равное $i_\alpha = \delta_1^\alpha + \operatorname{sgn}(1-\alpha)$ (δ_μ^ν — символ Кронекера), так как при этом рассматриваемые ниже случайные величины $\xi(\alpha, \rho)$ (см. (42)) оказываются непрерывными (в смысле сходимости по вариации их распределений) относительно обоих параметров $0 < \alpha \leqslant 2$ и ρ, $\left|\rho - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{K(\alpha)}{2\alpha}$. В форме (В) значительно упрощается вид асимптотических разложений, приводившихся в работе А. В. Скорохода [2], очень просто записывается значение в нуле устойчивого распределения и плотности для параметров $\alpha \neq 1$, $\gamma = 0$:

$$F(0, \alpha, \beta, 0, \lambda) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{K(\alpha)}{\alpha}\beta\right)$$

$$p(0, \alpha, \beta, 0, \lambda) = \frac{\lambda^{-1/\alpha}}{\pi}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\cos\left[\frac{\pi}{2}\frac{K(\alpha)}{\alpha}\beta\right].$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ — некоторые постоянные, зависящие от параметров, (это свойство легче всего просматривается в форме (A)).

$$\log f(t, \alpha, j_\alpha, \gamma, \lambda) = \begin{cases} it\gamma + \lambda(-it)^\alpha \operatorname{sgn}(\alpha - 1), & \alpha \neq 1 \\ it\gamma + \lambda \cdot \frac{2}{\pi}(-it)\log(-it), & \alpha = 1. \end{cases} \tag{14}$$

Из формул (14) видно, что $f(t, \alpha, j_\alpha, \gamma, \lambda)$ допускает аналитическое продолжение во всей комплексной плоскости, которое, очевидно, будет совпадать с двусторонним преобразованием Лапласа функции $p(x, \alpha, j_\alpha, \gamma, \lambda)$ (в силу свойства (12) то же самое можно сказать и относительно $f(t, \alpha, -j_\alpha, \gamma, \lambda)$. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} p(x, \alpha, j_\alpha, \gamma, \lambda)\, dx = \begin{cases} \exp\{-s\gamma + \lambda s^\alpha \operatorname{sgn}(\alpha - 1)\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{-s\gamma + \frac{2}{\pi}\lambda s \log s\right\}, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{15}$$

(в равенстве (15) при $\alpha < 1$ мы имеем на самом деле одностороннее преобразование Лапласа). В работе автора [4] приводилась также следующая формула ($\alpha > 1$):

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} p(x, \alpha, 1, 0, 1)\, dx = \frac{1}{\alpha} E_{\frac{1}{\alpha}}(-s), \tag{16}$$

Здесь $E_r(x)$ — функция Миттаг-Леффлера и s — любое комплексное число.

2.2. Преобразования Меллина устойчивых законов распределения. Устойчивые законы абсолютно непрерывны и потому мы можем рассматривать преобразования Меллина — Стильтьеса как обычные преобразования Меллина. Обозначим

$$\mathbf{R}(s, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \int_0^{\infty} x^s p(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda)\, dx.$$

Этот интеграл, как видно из асимптотики на бесконечности функции $p(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ (см. [2]), существует по крайней мере для значений s из полосы $-1 < \operatorname{Re} s < \alpha$. В дальнейшем главным образом будут рассматриваться только те устойчивые законы, для которых $\alpha \neq 1$, $\gamma = 0$ или же $\alpha = 1$ и $\beta = 0$, а остающиеся два параметра принимают любые допустимые значения. Класс таких устойчивых распределений мы будем обозначать через $\mathbf{W}$. Исключение из рассмотрения остальных законов объясняется следующими причинами. Ряд соображений показывает, что устойчивые распределения при $\gamma = 0$ естественным образом распадаются на две аналитически самостоятельные ветви — положительную ($x \geqslant 0$) и отрицательную ($x \leqslant 0$) (заметим, что именно это обстоятельство делает целесообразным введение понятия срезок, в терминах которых зависимости между ветвями формулируются особенно просто). При $\alpha \neq 1$ преобразование Меллина, соответствующее такой ветви, может быть записано с помощью Г-функций Эйлера, причем связующим звеном для законов с $\alpha > 1$ и законов с $\alpha < 1$ выступает смещенное распределение Коши ($\alpha = 1$, $\beta = 0$), для которого преобразование Меллина находится в явном виде даже, когда $\gamma \neq 0$. То, что для законов, не входящих в $\mathbf{W}$, не удается найти явного выражения соответствующего им преобразова-

ния Меллина (см. замечание 2 к теореме 3) заставляет отказаться от изучения этих законов в плане настоящей статьи.

Теорема 3. *Для устойчивых законов класса* **W** *в полосе* $-1 < \operatorname{Re} s < \alpha$ *справедливо равенство*

$$\mathbf{R}(s, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = (\gamma^2 + \lambda^2)^{\frac{s}{2\alpha}} \frac{\sin \pi\rho s}{\sin \pi s} \cdot \frac{\Gamma\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)}{\Gamma(1-s)}, \tag{17}$$

где

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{K(\alpha)}{2\alpha}\beta, & \text{если } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\lambda}, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases} \tag{18}$$

Доказательство*. С помощью равенства (11) нетрудно получить соотношения

$$\mathbf{R}(s, \alpha, \beta, 0, \lambda) = \lambda^{\frac{s}{\alpha}} \mathbf{R}(s, \alpha, \beta, 0, 1), \tag{19}$$

$$\mathbf{R}(s, 1, 0, \gamma, \lambda) = (\gamma^2 + \lambda^2)^{\frac{s}{2}} \mathbf{R}(s, 1, 0, -\cos \pi\rho, \sin \pi\rho), \tag{20}$$

из которых видно, что при доказательстве теоремы мы можем ограничиться рассмотрением случаев $\gamma = 0$, $\lambda = 1$ при $\alpha \neq 1$ и $\gamma = -\cos \pi\rho$, $\lambda = \sin \pi\rho$ при $\alpha = 1$.

а) $\alpha \neq 1$. Мы проведем доказательство в предположении $\alpha < 1$. Случай $\alpha > 1$, как будет видно из самого доказательства, разбирается вполне аналогично.

Используя формулу обращения для плотности $p(x, \alpha, \beta, 0, 1)$, представляем функцию $\mathbf{R}(s, \alpha, \beta, 0, 1)$ в виде

$$\mathbf{R}(s, \alpha, \beta, 0, 1) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty x^s \, dx \int_0^\infty e^{-itx - t^\alpha \exp\left\{-i\frac{\pi}{2}\alpha\beta\right\}} \, dt$$

(s — действительное число из интервала $(-1, \alpha)$). Поворачиваем контур интегрирования внутреннего интеграла на угол $0 < \varepsilon < \frac{1}{\alpha} - \beta$ по часовой стрелке, после чего выражение, стоящее под знаком двойного интеграла, становится абсолютно интегрируемым. Абсолютная интегрируемость позволяет нам изменить порядок интегрирования. Вновь выделенный при этом внутренний интеграл после замены переменного интегрирования x на x/t и последующего поворота контура интегрирования на угол $\varepsilon - \frac{\pi}{2}$ приводит нас к функции $\Gamma(1+s)$. Аналогичная процедура с оставшимся интегралом дает для функции **R** выражение

$$\frac{1}{s}\Gamma(1+s)\Gamma\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)\sin\frac{\pi}{2}(1+\beta)s = \frac{\sin\frac{\pi}{2}(1+\beta)s}{\sin \pi s} \cdot \frac{\Gamma\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)}{\Gamma(1-s)},$$

которое, очевидно, вместе с (19) эквивалентно равенству (17). Аналитически продолжив функции равенства (17) на всю полосу $-1 < \operatorname{Re} s < \alpha$, мы приходим к утверждению первой части теоремы.

* Применение теоремы 2 не дает существенного сокращения выкладок, поэтому мы приводим самостоятельное доказательство теоремы 3.

б) $\alpha = 1$. При доказательстве второй части теоремы мы будем отправляться от следующей формулы (см. [5] стр. 282)

$$\frac{\operatorname{sh} \pi\rho t}{\operatorname{sh} \pi t} = \frac{\sin(\pi\rho it)}{\sin(\pi it)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-itx}\frac{\sin \pi\rho}{\operatorname{ch} x + \cos \pi\rho}\,dx. \tag{21}$$

Нам надо найти вид функции $r(x)$, определяемой равенством

$$\frac{\sin \pi\rho s}{\sin \pi s} = \int_0^\infty x^s r(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-sx}e^{-x}r(e^{-x})\,dx. \tag{22}$$

Полагая $s = it$ и сравнивая (21) и (22), находим, что

$$r(x) = \frac{1}{2\pi x}\frac{\sin \pi\rho}{\operatorname{ch}\log x + \cos \pi\rho} = \frac{1}{\pi}\frac{\sin \pi\rho}{x^2 + 2x\cos \pi\rho + 1}.$$

Последнее выражение, если учесть, что $p(x, 1, 0, 0, 1) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ можно представить в виде

$$r(x) = \frac{1}{\sin \pi\rho}\,p\left(\frac{x + \cos \pi\rho}{\sin \pi\rho}, 1, 0, 0, 1\right) = p(x, 1, 0, -\cos \pi\rho, \sin \pi\rho),$$

что вместе с (20) доставляет нам доказательство второй части теоремы.

Замечание 1. Согласно формулам перехода (10)

$$F_A(x, \alpha, \beta_A, \gamma, \lambda_A) = F_B(x, \alpha, \beta_B, \gamma, \lambda_B), \tag{23}$$

где

$$\beta_B = \frac{2}{\pi K(\alpha)}\operatorname{arctg}\left(\beta_A \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha\right) \text{ и } \lambda_B = \lambda_A\sqrt{1 + \beta_A^2 \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\alpha},$$

то в случае $\alpha \neq 1$ явное выражение функции $\mathbf{R}_A(s, \alpha, \beta_A, 0, \lambda_A)$ получается из (17) путем замены параметров β_B и λ_B их явными выражениями через α, β_A и λ_A.

Замечание 2. Явного и достаточно простого выражения функции $\mathbf{R}$ в случае $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$, по-видимому, не существует. Укажем на уравнение, связанное с этой функцией:

$$T(s, \beta) = \frac{\beta}{s}\frac{\partial T(s, \beta)}{\partial \beta} + \left(1 - i\frac{2}{\pi}\beta\right)T(s-1, \beta). \tag{24}$$

Функция $T(s, \beta)$ связана с функцией $\mathbf{R}(s, 1, \beta) = \mathbf{R}(s, 1, \beta, 0, 1)$ равенством

$$\mathbf{R}(s, 1, \beta) = \operatorname{Re}\left\{T(s, \beta)\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-s)}}{\sin \pi s}\right\}$$

и удовлетворяет граничным условиям $T(s, 0) = T(0, \beta) = 1$. Указанные граничные условия не определяют однозначно решения уравнения (24), как показывает функция $\left(c\beta + 1 + i\frac{2}{\pi}\beta\log\beta\right)^s$, которая удовлетворяет уравнению и обоим условиям и тем не менее содержит произвольную постоянную c. Общее решение уравнения (24), удовлетворяющее необходимым граничным условиям, дается интегралом

$$\int\left[C(u)\beta + 1 + i\frac{2}{\pi}\beta\log\beta\right]^s dA(u),$$

в котором $C(u)$ и $A(u)$ — некоторые, вообще говоря, комплекснозначные функции вещественного аргумента, причем $\int dA(u) = 1$.

2.3. Представление функции $\Pi(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$. После того как мы получили явное выражение для преобразования Меллина $\mathbf{R}$, мы можем, используя теорему 1, попытаться отыскать вид функции $\Pi(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$, порожденной распределением $F(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$.

Теорема 4. *Для устойчивых законов класса* $\mathbf{W}$ *в полуплоскости* $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ *имеем*:

1° *Если* $\alpha < 1$, *и* $\beta =$, *то*

$$\Pi(s, \alpha, 1, 0, \lambda) = \exp\{-\lambda s^{\alpha}\} \tag{25}$$

2° *В остальных случаях*

$$\Pi(s, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \exp\{-(sx)^{\alpha}\sqrt{\gamma^2+\lambda^2}\}\,\frac{\sin\pi\rho\,dx}{x^2+2x\cos\pi\rho+1}, \tag{26}$$

где ρ *определяется согласно* (18).

Доказательство. Очевидно, в силу принципа аналитического продолжения, достаточно эти равенства доказать для положительных значений s.

1° Равенство (25) непосредственно следует из соотношения (15) и замечания 1 к теореме 2.

2° Согласно теореме 3 и равенству (4) теоремы 1, имеем

$$\int_0^{\infty} x^s\,d\,\Pi\left(\frac{1}{x}, \alpha, \beta, \gamma, \lambda\right) = (\gamma^2+\lambda^2)^{\frac{s}{2\alpha}}\,\frac{\sin\pi\rho s}{\sin\pi s}\cdot\Gamma\left(1-\frac{s}{\alpha}\right) =$$

$$= (\gamma^2+\lambda^2)^{\frac{s}{2\alpha}}\,\Gamma\left(1-\frac{s}{\alpha}\right)\cdot\mathbf{R}(s, 1, 0, -\cos\pi\rho, \sin\pi\rho).$$

Применяя теперь формулу свертки (1) для преобразования Меллина — Стильтьеса, получаем

$$\Pi(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-(xy)^{\alpha}\sqrt{\gamma^2+\lambda^2}}\,dF(y, 1, 0, -\cos\pi\rho, \sin\pi\rho),$$

что эквивалентно утверждению теоремы.

Замечание 1. Формула (16) дает новое представление функции Π в случае $\alpha > 1$, $\beta = 1$ и $\gamma = 0$, именно

$$\Pi(s, \alpha, 1, 0, \lambda) = \frac{1}{\alpha}E_{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda^{\frac{1}{\alpha}}s), \tag{27}$$

где $E_r(x)$ — функция Миттаг-Леффлера.

Из сравнения этих двух форм мы получаем новое (насколько это известно автору) представление для самой функции $E_r(x)$:

$$E_r(-x) = \frac{1}{\pi r}\int_0^{\infty} e^{-(xu)^{\frac{1}{r}}}\,\frac{\sin\pi r\cdot du}{u^2+2u\cos\pi r+1};\quad x \geqslant 0,\quad \frac{1}{2} \leqslant r < 1. \tag{28}$$

В частности, при $r = \frac{1}{2}$

$$E_{\frac{1}{2}}^{*}(-x) = e^{x^2}[1 - \Phi(x)], \text{ где } \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Замечание 2. Теорема 4 совместно с (12) и свойством срезок 6° позволяет получить следующее интегральное представление функции $\mathbf{M}\exp\{-s\,|\,\xi(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)\,|\}$ для устойчиво распределенных случайных величин класса W:

$$\mathbf{M}\exp\{-s\,|\,\xi(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)\,|\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sin \pi\rho \int_0^\infty \exp\{-(sy)^\alpha \sqrt{\gamma^2 + \lambda^2}\} \frac{(y^2+1)\, dy}{(y^2+1)^2 - 4y^2 \cos \pi\rho}, \quad (\operatorname{Re} s \geqslant 0).$$

2.4. Асимптотическое разложение устойчивых распределений в точках $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Легко видеть, что в области допустимых значений, из которой исключены множества точек $\{x, \alpha = 1, \beta \neq 0, \gamma, \lambda\}$, устойчивое распределение $F(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ является непрерывной функцией по совокупности всех переменных. Точки $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ являются критическими для функции F в том смысле, что ее поведение вблизи каждой из них зависит от пути приближения к этой точке. Так, например, при $\alpha \to 0$ и фиксированных значениях остальных переменных функция F вообще не сходится ни к какому распределению, а если вместе с α к нулю стремится также λ, то F сходится к несобственному распределению $E(x - \gamma)$. Естественна попытка выяснить, для каких путей приближения к критическим точкам наблюдается сближение устойчивого распределения с каким-либо собственным распределением. В плане этого вопроса и строятся все теоремы этого пункта. При этом фиксирование переменных x, β, γ и λ (там где они не получают конкретных значений вроде $\gamma = 0$ в теореме 5) во всех теоремах продиктовано желанием упростить доказательства. Нетрудно показать, что все приведенные асимптотические соотношения будут выполняться равномерно по неконкретизированным переменным в любой внутренней замкнутой подобласти допустимых значений (т. е. $|\beta| \leqslant b < 1$, $|\gamma| \leqslant g < \infty$, $|x| \leqslant K < \infty$ и $0 < \delta \leqslant \lambda \leqslant \Delta < \infty$). Относительно равномерности по x см. также замечание 2 к теореме 6.

Теорема 5. *При $\alpha \to 0$ имеет место следующее асимптотическое соотношение:*

$$F(x^{-\frac{1}{\alpha}}, \alpha, \beta, 0, \lambda) \sim \frac{1-\beta}{2} + \frac{1+\beta}{2} e^{-\lambda x}. \qquad (29)$$

Доказательство. Как видно из теоремы 4, при $\alpha \to 0$,

$$\Pi(x^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha, \beta, 0, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\{-\lambda x u^\alpha\} \frac{\sin \pi\rho}{u^2 + 2u \cos \pi\rho + 1}\, du \to$$

$$\to \frac{1}{\pi} e^{-\lambda x} \int_0^\infty \frac{\cos \frac{\pi}{2}\beta}{u^2 - 2u \sin \frac{\pi}{2}\beta + 1}\, du = \frac{1-\beta}{2} + \frac{1+\beta}{2} e^{-\lambda x}.$$

Применяя теперь теорему 1а, получаем (29).

Из формул (23) видно, что $\beta_A \sim \beta_B$ и $\lambda_A \sim \lambda_B$, когда $\alpha \to 0$. Таким образом, теорема 5 в приведенной формулировке справедлива для обеих форм (A) и (B).

Теорема 6. *При* $\alpha \to 0$ *имеет место следующее асимптотическое разложение* ($x > 0$):

$$F(x^{-\frac{1}{\alpha}}, \alpha, \beta, 0, \lambda) \sim \frac{1-\beta}{2} + e^{-\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n}{n!} P_n(-\lambda x)\, \alpha^n \qquad (30)$$

где

$$\Delta_n = \begin{cases} \chi_n & , \text{ если } \beta = 1 \\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \chi_k W_{n-k}, & \text{если } \beta \neq 1 \end{cases}$$

$$W_n = \left(-\frac{1}{\pi^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^k (2^{n-k} - 2)\, u_k B_{n-k}^*$$

$u_n = 0$, *если* n — *четное и* $u_n = 1$, *если* n — *нечетное, а* χ_n *и* $P_n(x)$ *имеют тот же смысл, что и в* (6).

Доказательство. Сначала мы убедимся, что формальное разложение функции $F(x^{-\frac{1}{\alpha}}, \alpha, \beta, 0, \lambda)$ в ряд по степеням α совпадает с (30). Что касается случая $\beta = 1$, то для него (30) получается сразу же из (6), если положить в нем $\alpha = \varepsilon$ и $\Pi(x) = \exp\{-x^\alpha\}$. В случае $\beta \neq 1$ разложение (30) также может быть получено из (6), поскольку теоремой 4 дается вид функции Π, однако это будет связано с громоздкими выкладками. Мы предпочтем отправляться непосредственно от представления (17) функции $\mathbf{R}$.

Согласно (17) имеем

$$-\int_0^\infty x^{-s}\, dF(x^{-\frac{1}{\alpha}}, \alpha, \beta, 0, 1) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1+\beta)\alpha s\right]}{\sin \pi\alpha s} \cdot \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\alpha s)} =$$

$$= \mathbf{R}\left(\alpha s, 1, 0, \sin\frac{\pi}{2}\beta, \cos\frac{\pi}{2}\beta\right) \cdot \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\alpha s)}.$$

Разлагаем в ряды по степеням αs функции $\Gamma^{-1}(1-\alpha s)$ и $\mathbf{R}\left(\alpha s, 1, 0, \sin\frac{\pi}{2}\beta, \cos\frac{\pi}{2}\beta\right)$:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_n}{n!} (\alpha s)^n$$

(χ_n определялась в (6)),

$$\mathbf{R}\left(\alpha s, 1, 0, \sin\frac{\pi}{2}\beta, \cos\frac{\pi}{2}\beta\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W_n}{n!} (\alpha s)^n,$$

участвующие здесь W_n определялись в формулировке теоремы. Последнее разложение получается если перемножить ряды, соответствующие функциям $\sin\left[\frac{\pi}{2}(1+\beta)\alpha s\right]$ и $\operatorname{cosec} \pi\alpha s$.

* B_n — числа Бернулли.

Таким образом, функция $\mathbf{R}(\alpha s, \alpha, \beta, 0, 1)$ может быть формально разложена в ряд

$$\mathbf{R}(\alpha s, \alpha, \beta, 0, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha s)^n}{n!} \int_0^{\infty} \log^n x \, dF\left(x, 1, \sin\frac{\pi}{2}\beta, \cos\frac{\pi}{2}\beta\right) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha s)^n}{n!} \chi_n \cdot \Gamma(1-s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{s^n \Gamma(1-s)}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \chi_k W_{n-k}\right] \alpha^n$$

Поскольку

$$s^n \Gamma(1-s) = -\int_0^{\infty} x^{-s} \, d\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x}\right],$$

то после формального обращения преобразования Меллина мы получаем

$$F(x^{-1/\alpha}, \alpha, \beta, 0, 1) = c + e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n}{n!} P_n(-x)\alpha^n. \tag{32}$$

Постоянную c нетрудно определить из условия $F(\infty, \alpha, \beta, \ldots,) = 1$, если учесть, что $P_n(0) = 0$ для $n \geqslant 1$. Обоснование этих формальных разложений не представляет труда. Действительно, вычтем из обеих частей равенства (17), в котором предварительно произведена замена s на $-s/\alpha$, какую-либо конечную часть разложения (32), например до n-го слагаемого включительно, разделим обе части полученного равенства на α^{n+1} и перейдем к пределу при $\alpha \to 0$. Предел справа существует и представляет собой преобразование Меллина функции ограниченной вариации $\frac{\Delta_{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{x} P_{n+2}(-x) e^{-x}$. Допредельное выражение слева представляет собой также преобразование Меллина от функции ограниченной (равномерно по α) вариации. Следовательно, из сходимости преобразований Меллина вытекает сходимость преобразуемых функций. Переход от $\lambda = 1$ к произвольному допустимому значению λ осуществляется с помощью формулы (11).

Замечание 1. Теорема 6 формулировалась для устойчивых законов в форме (B). Переход к форме (A) осуществляется очень просто, если принять во внимание замечание 1 к теореме 3.

Замечание 2. Асимптотическое разложение (30) можно дифференцировать любое число раз. Это относится также к (33) и (36).

Нетрудно видеть, что сходимость в (29) можно понимать как в смысле сильной сходимости, так и в смысле сходимости по вариации.

Разложение устойчивых распределений в точке $\alpha = 1$ нам будет удобнее в нижеследующей теореме проводить, рассматривая устойчивые законы в форме (A). Переход к форме (B) осуществляется так же, как и в предыдущей теореме осуществлялся переход к форме (A).

Теорема 7. *При $\alpha \to 1$ имеет место следующее асимптотическое разложение (все параметры соответствуют форме (A)):*

$$F_A\left(x + \lambda\beta \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha, \alpha, \beta, \gamma, \lambda\right) \sim F(x, 1, \beta, \gamma, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x, \beta, \lambda)(\alpha - 1)^n. \tag{33}$$

Преобразования Фурье — Стильтьеса функций ограниченной вариации Ψ_n *могут быть явно выписаны с помощью показательных степенных и логарифмических функций. Для функции* Ψ_1 *может быть получено, в частности, следующее выражение*

$$\Psi_1(x, \beta, \lambda) = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-\gamma}{\lambda} + \beta\right)\frac{\partial}{\partial\beta}F(x-\gamma, 1, \beta, \gamma, \lambda) + G(\beta, \lambda),$$

где G *— некоторая функция переменных* β *и* λ.

При доказательстве нам понадобится разложение функции $\operatorname{tg} x$:

$$(\alpha-1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha = -\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}[\pi(\alpha-1)]^{2k} \quad (B_n \text{ — числа Бернулли}).$$

Полагая

$$D_n = \begin{cases} -1 & \text{если } n = 0 \\ 0 & \text{если } n = 1 \\ |B_n|\pi^n, & \text{если } n \geqslant 2; \end{cases} \tag{34}$$

мы можем записать это разложение в виде

$$(\alpha-1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{n!}(\alpha-1)^n.$$

Через $E_n(a_r)$ мы будем обозначать коэффициенты разложения в ряд Тейлора функции

$$\exp\left\{\sum_{r=1}^{\infty}a_r z^r\right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}E_n(a_r)z^n. \tag{35}$$

Легко проверяется следующая цепочка равенств

$$\log f_A\left(t, \alpha, \beta, \gamma - \lambda\beta t\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha, \lambda\right) - \log f(t, 1, \beta, \gamma, \lambda) =$$

$$= \lambda(1 - \exp\{(\alpha-1)\log|t|\})\left(|t| - it\beta\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha\right) - it\frac{2}{\pi}\lambda\beta\log|t| =$$

$$= -\lambda|t|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^n|t|}{n!}(\alpha-1)^n + it\frac{2}{\pi}\beta(\alpha-1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha \times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^n|t|}{n!}(\alpha-1)^{n-1} - it\frac{2}{\pi}\lambda\beta\log|t| =$$

$$= \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[it\frac{2}{\pi}\beta\log|t|\sum_{k=0}^{n}C_n^k D_{n-k}\frac{\log^k|t|}{(k+1)} - |t|\log^n|t|\right](\alpha-1)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\lambda Q_n(t, \beta)(\alpha-1)^n.$$

Отсюда

$$f_A\left(t, \alpha, \beta, \gamma - \lambda\beta\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha, \lambda\right) = f(t, 1, \beta, \gamma, \lambda)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}E_n(\lambda Q_r)(\alpha-1)^n\right].$$

Очевидно, что каждое слагаемое выражается с помощью показательной, степенной и логарифмической функции переменного t. Обратное преобразование Фурье приводит нас к разложению (33). Обоснование этого формального разложения проводится так же, как и в теореме 6. Вид функций Ψ_n, вообще говоря, очень сложен, но в некоторых случаях они могут быть явно выражены с помощью функции $F(x, 1, \beta, \gamma, \lambda)$. Для примера вычислим Ψ_1.

$$E_1(\lambda Q_\tau) = \lambda Q_1 = -\lambda |t| \log |t| - it \frac{2}{\pi} \lambda\beta \log^2 |t| = \log f(t, 1, \beta, 0, \lambda) \cdot \log |t|.$$

Таким образом,

$$\int e^{itx} d\Psi_1(x + \gamma, \beta, \lambda) = \log |t| \cdot f(t, 1, \beta, 0, \lambda) \cdot \log f(t, 1, \beta, 0, \lambda) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \lambda \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} \frac{1}{\lambda} \right) \frac{f(t, 1, \beta, 0, \lambda) - 1}{it},$$

но для любой характеристической функции $\varphi(t)$ с функцией распределения $\Phi(x)$ справедливо равенство

$$\frac{\varphi(t) - 1}{it} = -\int e^{itx} \Phi^*(x)\, dx,$$

где

$$\Phi^*(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x < 0 \\ \Phi(x) - 1, & x > 0. \end{cases}$$

Итак,

$$\int e^{itx} d\Psi_1(x + \gamma, \beta, \lambda) = \int e^{itx} \frac{\pi}{2} \lambda \frac{\partial^2}{\partial\beta \partial\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} F^*(x, 1, \beta, 0, \lambda) \right) dx,$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi_1(x + \gamma, \beta, \lambda) = \frac{\pi}{2} \lambda \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial\beta} F(x, 1, \beta, 0, \lambda),$$

Используя свойство (11), мы после небольших преобразований получаем

$$\Psi_1(x + \gamma, \beta, \lambda) = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{\lambda} + \beta \right) \frac{\partial}{\partial\beta} F(x, 1, \beta, 0, \lambda) + G(\beta, \lambda).$$

Устойчивые законы в форме (B), как нетрудно видеть, при $\alpha \to 1$ сближаются с несобственным распределением, если $\beta = \pm 1$, и со смещенным распределением Коши, если $|\beta| < 1$. Приводимая ниже теорема уточняет это утверждение для некрайних устойчивых распределений.

Теорема 8. *Для некрайних устойчивых распределений при* $\alpha \to 1$ *имеет место следующее асимптотическое представление*

$$F(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) \sim F(x, 1, 0, \gamma', \lambda') + \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(x, \beta, \lambda) \cdot (\alpha - 1)^n, \qquad (36)$$

где $\gamma' = \gamma + \lambda \sin \frac{\pi}{2} \beta$ и $\lambda' = \lambda \cos \frac{\pi}{2} \beta$.

Преобразования Фурье — Стильтьеса функций ограниченной вариации $\Theta_n(x, \beta, \lambda)$ *могут быть явно выражены с помощью показательных, степенных и логарифмических функций.*

Доказательство. Проверяется следующая серия преобразований:

$$\log f(t,\alpha,\beta,\gamma,\lambda) = it\gamma - \lambda|t|\exp\left\{(\alpha-1)\log|t| - i\frac{\pi}{2}K(\alpha)\beta\frac{t}{|t|}\right\} =$$

$$= it\gamma - \lambda|t|\exp\left\{-i\frac{\pi}{2}\beta\frac{|t|}{t}\right\}\cdot\exp\left\{(\alpha-1)\left[\log|t| - i\frac{\pi}{2}\beta\frac{t}{|t|}\right]\right\} =$$

$$= \log f(t,1,0,\gamma',\lambda') - \lambda|t|e^{-i\frac{\pi}{2}\beta\frac{t}{|t|}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log|t| - i\frac{\pi}{2}\beta\frac{t}{|t|}\right)^n\frac{(\alpha-1)^n}{n!} =$$

$$= \log f(t,1,0,\gamma',\lambda') - \sum_{n=1}^{\infty}\lambda Q_n(t,\beta)(\alpha-1)^n.$$

Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и в теореме 7.

2.5. **Моменты дробно-логарифмического порядка устойчивых законов.** Поскольку теорема 3 позволяет находить в явном виде $\mathbf{M}\widetilde{\xi}^s$ и $\mathbf{M}(\widetilde{-\xi})^s$ для устойчиво распределенных случайных величин ξ класса $\mathbf{W}$, то, как это уже отмечалось в 1.4, мы можем найти в явном виде $\mathbf{M}|\xi|^s\operatorname{sgn}^r\xi$, $(r=1,2)$ для случайных величин ξ из того же класса.

Теорема 9. *Для значений s из полосы $-1<\operatorname{Re}s<\alpha$ и $\xi\in\mathbf{W}$ справедливы следующие равенства:*

$$\mathbf{M}|\xi(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)|^s = (\gamma^2+\lambda^2)^{\frac{s}{2\alpha}}\frac{\cos\pi\left(\rho-\frac{1}{2}\right)s}{\cos\frac{\pi}{2}s}\cdot\frac{\Gamma\left(1-\frac{s}{\alpha}\right)}{\Gamma(1-s)} \tag{37}$$

$$\mathbf{M}|\xi(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)|^s\operatorname{sgn}\xi(\alpha,\ldots) = (\gamma^2+\lambda^2)^{\frac{s}{2\alpha}}\frac{\sin\pi\left(\rho-\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{\pi}{2}s}\cdot\frac{\Gamma\left(1-\frac{s}{\alpha}\right)}{\Gamma(1-s)},$$

здесь ρ имеет тот же смысл, что и в теореме 3.

Доказательство, ввиду его простоты, мы приводить не будем.

Таким образом, дробно-логарифмические моменты $\mathbf{M}|\xi|^s\log^n|\xi|$ также могут быть явно выписаны с помощью функции Γ и ее производных для устойчивых распределений класса $\mathbf{W}$. Мы вычислим сейчас чисто логарифмические моменты для распределений этого класса. Для простоты будем считать $\lambda=1$.

Разлагаем в ряд по степеням s правую и левую части равенства (37), полагая предварительно $\alpha=1$. Это дает

$$\omega_n = \mathbf{M}\log^n|\xi(1,0,\gamma,1)| =$$

$$= \begin{cases}\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{2k}\left[\frac{\pi}{2}\left(\rho-\frac{1}{2}\right)\right]^{2k}E_{2(n-k)}, & \text{если } n \text{ — четное}\\ 0, & \text{если } n \text{ — нечетное,}\end{cases}$$

здесь E_n — числа Эйлера. Разложение равенства (37) в случае $\alpha\neq1$ дает после приравнивания коэффициентов

$$\mathbf{M}\log^n|\xi(\alpha,\beta,0,1)| = \sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta_k\omega_{n-k},$$

где

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \gamma_k \chi_{n-k} \alpha^{-k}.$$

Числа χ_n те же, что в (6), а $\gamma_n = [(-1)^n \Gamma^{(n)}(x)]_{x=1}$.

2.6. Мультипликативные свойства ветвей устойчивых распределений. В этом пункте свойства устойчивых распределений будут формулироваться в терминах соответствующих им случайных величин и их срезок. На протяжении всего пункта следует иметь в виду, что 1° *Эквивалентность случайных величин, как и в разделе* 1, *понимается в смысле совпадения соответствующих им распределений.* 2° *Раздельно записанные случайные величины считаются независимыми.*

Так, например, хорошо известное характеристическое свойство устойчивых распределений (иногда оно принимается за определение) в нашей записи будет иметь вид

$$\xi(\alpha, \beta, \gamma_1, \lambda_1) + \xi(\alpha, \beta, \gamma_2, \lambda_2) \approx \xi(\alpha, \beta, \gamma, \lambda), \tag{38}$$

где параметры слагаемых случайных величин принимают произвольные допустимые значения, а γ и λ однозначно по ним определяются.

Как будет видно из дальнейшего, использование случайных величин, вместо функций распределения в формулировках теорем, позволяет сделать изложение материала менее громоздким и более прозрачным. Переформулировка же этих теорем на язык функций распределения проводится без труда, если принять во внимание свойство 5° срезок и формулу свертки (1). Обратно, основные результаты предыдущих пунктов могут быть легко сформулированы в терминах случайных величин (такая переформулировка уже проводилась для теоремы 1 в замечании к этой теореме). Мы приведем здесь некоторые из них.

(Теорема 5) *При* $\alpha \to 0$, *в смысле сильной сходимости или в смысле сходимости по вариации* ($\xrightarrow{V}$)

$$[\widetilde{\xi}(\alpha, \beta, 0, \lambda)]^{\alpha} \xrightarrow{V} \lambda \cdot \eta^{-1},$$

где η *— случайная величина с показательным распределением.*

(Теорема 7) *Для устойчиво распределенных случайных величин, соответствующих форме* (*A*)

$$\xi_A\left(\alpha, \beta, \gamma - \lambda\beta \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}\alpha, \lambda\right) \xrightarrow{V} \xi(1, \beta, \gamma, \lambda), \text{ когда } \alpha \to 1.$$

(Теорема 8) *Для некрайних устойчиво распределенных случайных величин, соответствующих форме* (*B*), *при* $\alpha \to 1$

$$\xi(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) \xrightarrow{V} \xi(1, 0, \gamma', \lambda'),$$

где

$$\gamma' = \gamma + \lambda \sin \frac{\pi}{2}\beta, \qquad \lambda' = \lambda \cos \frac{\pi}{2}\beta$$

(сходимость по вариации случайных величин понимается как сходимость по вариации соответствующих им функций распределения).

Мы начнем с формулировки теоремы, обобщающей соотношение (38) и которую можно было бы назвать *теоремой сложения.*

Теорема 10. *Для всех допустимых значений параметров слагаемых случайных величин*

$$\xi(\alpha, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1) + \xi(\alpha, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2) \approx \xi(\alpha, \beta, \gamma, \lambda), \tag{39}$$

где параметры β, γ *и* λ *являются некоторыми функциями параметров слагаемых. В форме* (*A*) *их связь особенно проста:*

$$\beta = \frac{\beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_1.$$

Утверждение теоремы нетрудно получить, используя характеристические функции в форме (*A*). Ввиду простоты этих рассуждений мы их проводить не будем. Отметим, что (13) — частный случай (39). Следующую группу теорем можно назвать теоремами эквивалентности, хотя, как будет видно из дальнейшего, такое название весьма условно.

Теорема 11. *Для всех допустимых значений параметров*

$$-\xi(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) \approx \xi(\alpha, -\beta, -\gamma, \lambda) \tag{40}$$

$$\xi(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) \approx l_1 + \lambda_1^{1/\alpha}\xi(\alpha, \beta, \gamma_2, \lambda_2), \tag{41}$$

где

$$\lambda_1\lambda_2 = \lambda, \quad \gamma_1 + \gamma_2\lambda_1^{\frac{1}{\alpha}} = \gamma \text{ и } l_1 = \begin{cases} \gamma_1, & \text{если } \alpha \neq 1 \\ \gamma_1 + \frac{2}{\pi}\beta\lambda\log\lambda_1 & \text{если } \alpha = 1. \end{cases}$$

Свойства (40) и (41) легко усматриваются непосредственно из вида характеристической функции в одной из приводимых форм.

Далее будут рассматриваться только случайные величины класса **W**.

В силу мультипликативного характера связей, которые будут устанавливаться далее для срезок случайных величин этого класса, естественно все случайные величины предварительно нормировать умножением на положительные постоянные (см. свойство 1° срезок). Из теоремы 11 следует, что для случайных величин класса **W** справедливо соотношение

$$(\gamma^2 + \lambda^2)^{-\frac{1}{2\alpha}}\xi(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) \approx \begin{cases} \xi(\alpha, \beta, 0, 1), & \text{если } \alpha \neq 1 \\ \xi(1, 0, -\cos\pi\rho, \sin\pi\rho), & \text{если } \alpha = 1, \end{cases}$$

где ρ определяется согласно (18).

Таким образом, после нормировки умножением случайные величины класса **W** характеризуются уже двумя параметрами. Очевидно, что за такие параметры можно, в частности, принять α и ρ, определявшиеся в (18). Введем новые обозначения для этого двухпараметрического семейства случайных величин:

$$\xi(\alpha, \rho) = (\gamma^2 + \lambda^2)^{-\frac{1}{2\alpha}}\xi(\alpha, \beta, \gamma, \lambda). \tag{42}$$

Параметр ρ независим от α, но имеет область изменения, зависящую от α, именно

$$\frac{1}{2} - \frac{1 - |1 - \alpha|}{2\alpha} \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1 - |1 - \alpha|}{2\alpha}; \quad (0 < \alpha \leqslant 2). \tag{43}$$

Отметим некоторые свойства случайных величин $\xi(\alpha, \rho)$.

$$-\xi(\alpha, \rho) \approx \xi(\alpha, 1-\rho) \tag{44}$$

(частный случай соотношения (41))

$$\widetilde{\xi}(\alpha, 0) \approx 0, \quad \widetilde{\xi}(1, 1) \approx 1 \tag{45}$$

$$\widetilde{\xi}\left(\alpha, \frac{1}{2}\right) \approx \left|\xi\left(\alpha, \frac{1}{2}\right)\right| \tag{46}$$

(следствие свойства 8° срезок).

Теорема 12. *Пусть α_1 и α_2 принимают любые допустимые значения, положительное ν выбирается так, что $\alpha_2/2 \leqslant \nu \leqslant 2/\alpha_1$ и μ — некоторое положительное число, тогда*

I. *если* $\rho_1 \leqslant \mu \cdot \min(1/\alpha_2, 1)$ *и* $\rho_2 \leqslant \frac{1}{\mu} \cdot \min(1/\alpha_1, 1)$, *то*

$$\widetilde{\xi}(\alpha_1, \rho_1) \cdot \widetilde{\xi}^{\mu}(\alpha_2, \rho_2) \approx \widetilde{\xi}(\alpha_1, \mu\rho_2) \cdot \widetilde{\xi}^{\mu}(\alpha_2, \rho_1/\mu) \tag{47}$$

$$\widetilde{\xi}(\alpha_1, \rho_1) \cdot \widetilde{\xi}^{-\mu}(\alpha_2, \rho_2) \approx \widetilde{\xi}(\alpha_1, \mu\rho_2) \widetilde{\xi}^{-\mu}(\alpha_2, \rho_1/\mu) \tag{48}$$

II. *если* $\rho_1 \leqslant \min(\nu/\alpha_2, 1)$ *и* $\rho_2 \leqslant \min(1/\alpha_1\nu, 1)$, *то*

$$\widetilde{\xi}(\alpha_1, \rho_1) \cdot \widetilde{\xi}^{\nu}(\alpha_2, \rho_2) \approx \widetilde{\xi}(\alpha_2/\nu, \rho_1) \cdot \widetilde{\xi}^{\nu}(\alpha_1\nu, \rho_2) \tag{49}$$

$$|\xi(\alpha_1, \rho_1)| \cdot |\xi(\alpha_2, \rho_2)|^{\nu} \approx |\xi(\alpha_2/\nu, \rho_1)| \cdot |\xi(\alpha_1\nu, \rho_2)|^{\nu} \tag{50}$$

III. *если* $\rho_1^* = \rho_2\mu + \frac{1}{2}(1-\mu) \leqslant \min(1/\alpha_1, 1)$ *и*

$\rho_2^* = \rho_1/\mu + \frac{1}{2}(1-1/\mu) \leqslant \min\left(\frac{1}{\alpha_2}, 1\right)$, *то*

$$|\xi(\alpha_1, \rho_1)| \cdot |\xi(\alpha_2, \rho_2)|^{\mu} \approx |\xi(\alpha_1, \rho_1^*)| \cdot |\xi(\alpha_2, \rho_2^*)|^{\mu} \tag{51}$$

$$|\xi(\alpha_1, \rho_1)| \cdot |\xi(\alpha_2, \rho_2)|^{-\mu} \approx |\xi(\alpha_1, \rho_1^*)| \cdot |\xi(\alpha_2, \rho_2^*)|^{-\mu} \tag{52}$$

Доказательство. Мы ограничимся доказательством соотношений (47) и (49). Остальные доказываются вполне аналогично, с той, однако, разницей, что в (50), (51) и (52) за исходную берется теорема 9. Очевидно, что для доказательства эквивалентности случайных величин достаточно показать, что соответствующие им преобразования Меллина равны. Согласно теореме 3

$$\mathbf{M}\{\widetilde{\xi}(\alpha_1, \rho_1) \cdot \widetilde{\xi}^{\mu}(\alpha_2, \rho_2)\}^s = \frac{\sin \pi\rho_1 s}{\sin \pi s} \cdot \frac{\Gamma(1-s/\alpha_1)}{\Gamma(1-s)} \cdot \frac{\sin \pi\rho_2 s\mu}{\sin \pi s\mu} \cdot \frac{\Gamma(1-\mu s/\alpha_2)}{\Gamma(1-\mu s)} =$$

$$= \frac{\sin \pi\rho_2 \mu s}{\sin \pi s} \cdot \frac{\Gamma(1-s/\alpha_1)}{\Gamma(1-s)} \cdot \frac{\sin \pi\rho_1 s}{\sin \pi\mu s} \cdot \frac{\Gamma(1-s\mu/\alpha_2)}{\Gamma(1-s\mu)} =$$

$$= \mathbf{M}\{\widetilde{\xi}(\alpha_1, \mu\rho_2) \widetilde{\xi}^{\mu}(\alpha_2, \rho_1/\mu)\}^s,$$

что и доказывает справедливость (47). С другой стороны,

$$\mathbf{M}\{\widetilde{\xi}(\alpha_1, \rho_1) \cdot \widetilde{\xi}^{\nu}(\alpha_2, \rho_2)\}^s = \frac{\sin \pi\rho_1 s}{\sin \pi s} \cdot \frac{\Gamma(1-s/\alpha_1)}{\Gamma(1-s)} \cdot \frac{\sin \pi\rho_2 \nu s}{\sin \pi\nu s} \cdot \frac{\Gamma(1-s\nu/\alpha_2)}{\Gamma(1-s\nu)} =$$

$$= \frac{\sin \pi\rho_1 s}{\sin \pi s} \cdot \frac{\Gamma(1-s\nu/\alpha_2)}{\Gamma(1-s)} \cdot \frac{\sin \pi\rho_2 \nu s}{\sin \pi\nu s} \cdot \frac{\Gamma(1-s\nu/\alpha_1\nu)}{\Gamma(1-s\nu)} =$$

$$= \mathbf{M}\{\widetilde{\xi}(\alpha_2/\nu, \rho_1) \widetilde{\xi}^{\nu}(\alpha_1\nu, \rho_2)\}^s,$$

откуда вытекает соотношение (49). Отметим, что применение (47) к правой части (49) дает нам новое соотношение эквивалентности

$$\widetilde{\xi}(\alpha_1, \rho_1)\widetilde{\xi}^{\nu}(\alpha_2, \rho_2) \approx \widetilde{\xi}(\alpha_2/\nu, \rho_2\nu)\cdot\widetilde{\xi}^{\nu}(\alpha_1\nu, \rho_1/\nu), \tag{53}$$

в предположении $\rho_1 \leqslant \min\{1/\alpha_2,\ 1/\nu\}$; $\rho_2 \leqslant \min\{1/\alpha_1, \nu\}$.

Некоторые частные случаи этой теоремы можно было бы назвать *теоремой умножения*, именно:

1°. *Если* $\alpha_1 > 1$ и $\rho_1 = 1/\alpha_1$ (*что соответствует значению* $\beta_1 = 1$), *то*

$$\widetilde{\xi}(\alpha_1, 1/\alpha_1)\widetilde{\xi}^{1/\alpha_1}(\alpha_2, \rho_2) \approx \widetilde{\xi}(\alpha_1\alpha_2, \rho_2/\alpha_1). \tag{54}$$

2°. *Если* $\alpha_2 < 1$ и $\rho_2 = 1$ (*что соответствует* $\beta_2 = 1$), то

$$\xi(\alpha_1, \rho_1)\cdot\widetilde{\xi}^{1/\alpha_1}(\alpha_2, 1) \approx \widetilde{\xi}(\alpha_1\alpha_2, \rho_1) \tag{55}$$

$$|\xi(\alpha_1, \rho_1)|\cdot|\xi(\alpha_2, 1)|^{1/\alpha_1} \approx |\xi(\alpha_1\alpha_2, \rho_1)| \tag{56}$$

3°. $$\widetilde{\xi}(\alpha_1, \rho_1)\widetilde{\xi}^{\rho_1}(1, \rho_2) \approx \widetilde{\xi}(\alpha_1, \rho_1\rho_2) \tag{57}$$

4°. $$|\xi(\alpha_1, \rho_1)|\cdot|\xi(1, \rho_2)|^{(2\rho_1-1)} \approx |\xi(\alpha_1, \rho')|, \tag{58}$$

где

$$\rho' = \frac{1}{2}[1 + (2\rho_1 - 1)(2\rho_2 - 1)].$$

Условия, участвующие в подпунктах I, II, III, возникают потому, что в соответствии с (43) параметр ρ имеет область изменения, зависящую от соответствующего ему значения α. В приведенных свойствах 1°—4° эти условия выполняются автоматически. Следствием (48) и (52) являются следующие соотношения:

$$\frac{1}{\widetilde{\xi}(1, \rho)} \approx \widetilde{\xi}(1, \rho); \quad \frac{1}{|\xi(1, \rho)|} \approx |\xi(1, \rho)|. \tag{59}$$

Теорема 13 (*«Деления»*). *Пусть* $\alpha_1 \leqslant 2\alpha_2$, *тогда при любых допустимых значениях остальных параметров* ρ_1 *и* ρ_2

$$\frac{\widetilde{\xi}(\alpha_1, \rho_1)}{\widetilde{\xi}(\alpha_2, \rho_2)} \approx \widetilde{\xi}^{1/\alpha_2}(\alpha_1/\alpha_2, \rho)\widetilde{\xi}(1, \rho^*), \tag{60}$$

где $\rho = \alpha_2 \min(\rho_1, \rho_2)$ *и* $\rho^* = \max(\rho_1, \rho_2)$.

$$|\xi(1, 1/2)|^{\nu}\cdot\frac{|\xi(\alpha_1, \rho_1)|}{|\xi(\alpha_2, \rho_2)|} \approx \widetilde{\xi}^{1/\alpha_2}(\alpha_1/\alpha_2,\ \alpha_2/2)\widetilde{\xi}(1, \rho'); \tag{61}$$

здесь $\nu = 2\rho_1 - 1$, $\rho' = \rho_2$ *или же* $\nu = 2\rho_2 - 1$ *и* $\rho' = \rho_1$.

Доказательство проводится вполне аналогично доказательству теоремы 12. На параметры ρ_1 и ρ_2 не приходится накладывать никаких дополнительных ограничений, поскольку всегда

$$\rho = \alpha_2 \min(\rho_1, \rho_2) \leqslant \min(\alpha_2/\alpha_1, 1).$$

Отметим наиболее интересные следствия этой теоремы.

1° *Для произвольных допустимых значений* α *и* ρ

$$\widetilde{\xi}^{1/\rho}(\alpha, \rho) = \frac{\xi(\alpha\rho, 1)}{\xi(\rho, 1)}. \tag{62}$$

2°. *Предположим, что* $\alpha_1 \leqslant 2\alpha_2$ *и* $\alpha_2 \leqslant 2\alpha_1$, *тогда*

$$\widetilde{\xi}^{1/\alpha_2}(\alpha_1/\alpha_2, \rho) \approx \widetilde{\xi}^{-1/\alpha_1}(\alpha_2/\alpha_1, \rho^*), \tag{63}$$

где ρ *и* ρ^* *связаны равенством* $\alpha_1\rho = \alpha_2\rho^*$. Этому свойству в терминах плотности $p_A(x, \alpha, \beta)$ была посвящена заметка автора [6].

3° *Если* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 1$ *и* $\rho^* = 1/\alpha$ (*что соответствует* $\beta^* = 1$), *то, как это видно из* (54),

$$\frac{\widetilde{\xi}(\alpha, \rho_1)}{\widetilde{\xi}(\alpha, \rho_2)} \approx \widetilde{\xi}(1, \rho/\alpha). \tag{64}$$

Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha < 1$ *и* $\rho^* = 1$ (*что соответствует* $\beta^* = 1$), *то*

$$\frac{\widetilde{\xi}(\alpha, \rho_1)}{\widetilde{\xi}(\alpha, \rho_2)} \approx \widetilde{\xi}^{1/\alpha}(1, \rho). \tag{65}$$

Естественным аналогом свойства (63) для случайных величин $|\xi(\alpha, \rho)|$ является следующее соотношение ($\alpha_1 \leqslant 2\alpha_2$ и $\alpha_2 \leqslant 2\alpha_1$):

$$|\xi(1, \rho_1)|^{\nu_1} \cdot |\xi(\alpha_1/\alpha_2, \rho)|^{1/\alpha_2} \approx |\xi(1, \rho_2)|^{\nu_2} \cdot |\xi(\alpha_2/\alpha_1, \rho^*)|^{-1/\alpha_2}, \tag{66}$$

где $\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\alpha_1 = \left(\rho^* - \frac{1}{2}\right)\alpha_2$ и остальные параметры должны удовлетворять одной из приведенных ниже систем условий

а) $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $\rho_1 = (2\alpha_1\nu)^{-1}$, $\rho_2 = (2\alpha_2\nu)^{-1}$ и $2\nu \geqslant \max(1/\alpha_1, 1/\alpha_2)$,
б) $\nu_1 = (2\alpha_2)^{-1}$, $\nu_2 = (2\alpha_1)^{-1}$, $\alpha_1\rho_1 = \alpha_2\rho_2$.

Нетрудно проверить, что (66) со значениями параметров из б) является простым следствием (63) и легко проверяемого соотношения

$$\widetilde{\xi}^{1/2}(1, |2\rho - 1|) \cdot |\xi(\alpha, \rho)| \approx \widetilde{\xi}(\alpha, |2\rho - 1|) \tag{67}$$

(ρ принимает любые допустимые в соответствии с α значения). Приведенные свойства не исчерпывают, конечно, всех связей в классе устойчивых распределений. Так, нами почти не рассматривались связи, в которых участвуют одновременно как срезки, так и абсолютные величины $\xi(\alpha, \rho)$, как, например,

$$\xi^2\left(1, \frac{1+\rho}{2}\right) \cdot \widetilde{\xi}(\alpha, \rho) \approx \widetilde{\xi}^2(1, \rho) \cdot \xi(\alpha, 1), \tag{68}$$

где $\alpha < 1$ и $\rho \leqslant 1$.

Впрочем, упрощение любых мультипликативных выражений, составленных из случайных величин $\xi(\alpha, \rho)$, их срезок и абсолютных величин, не представляет труда при использовании метода преобразований Меллина. В качестве примера мы найдем распределение следующего отношения независимых случайных величин ($\alpha < 1$):

$$\zeta = \frac{\xi(\alpha, 1, 0, 1)}{\xi(\alpha, \beta, 0, 1)} = \frac{\xi(\alpha, 1)}{\xi(\alpha, \rho)}, \qquad \rho = \frac{1+\beta}{2}.$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\{\xi < x \,|\, \xi > 0\} = \mathbf{P}\{\widetilde{\xi} < x\} \text{ и } \mathbf{P}\{\xi(\alpha, \rho) < 0\} = 1 - \rho,$$

то

$$\mathbf{P}\{\zeta < x\} = \rho \mathbf{P}\left\{\frac{\widetilde{\xi}(\alpha, 1)}{\widetilde{\xi}(\alpha, \rho)} < x\right\} + (1-\rho)\mathbf{P}\left\{\frac{\widetilde{\xi}(\alpha, 1)}{\widetilde{\xi}(\alpha, 1-\rho)} > -x\right\}.$$

Привлекая свойство (60), мы получаем

$$\mathbf{P}\{\zeta < x\} = \rho \mathbf{P}\{\widetilde{\xi}^{1/\alpha}(1, \alpha\rho) < x\} + (1-\rho)\mathbf{P}\{\widetilde{\xi}^{1/\alpha}(1, \alpha(1-\rho)) > -x\}.$$

Откуда

$$\mathbf{P}\{\zeta < x\} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\alpha}[1 - F(x^{\alpha}, 1, 0, -\cos\pi\rho, \sin\pi\rho)], & \text{для } x > 0 \\ \frac{1}{\alpha}[1 - F(|x|^{\alpha}, 1, 0, -\cos\pi(1-\rho), \sin\pi(1-\rho))], & \text{для } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Большинство приводившихся выше соотношений, по-видимому, не может быть сформулировано в столь же простой форме иначе, как в терминах срезок или абсолютных значений случайных величин. Однако в некоторых случаях, именно когда удается применить свойства 3° или 7° срезок, эти свойства формулируются в терминах самих случайных величин. Так, например, используя соотношения (40) и (41), можно показать, что свойство (55) эквивалентно следующему утверждению. Пусть $\xi_1(t, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $\xi_2(t, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ — устойчивые процессы, соответствующие форме (B), (т. е. их характеристические функции берутся в форме (B)), причем $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\alpha_2 < 1$ и $\beta_2 = 1$, тогда

$$\xi_1(\xi_2(t, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \approx \xi(t, \alpha, \beta, \gamma),$$

где

$$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2, \quad \beta = \frac{\alpha_2 K(\alpha_1)}{K(\alpha_1\alpha_2)}\beta_1, \quad \gamma = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М.— Л., ГИТТЛ, 1949.

[2] А. В. Скороход, Асимптотические формулы для устойчивых законов распределения, ДАН СССР, 98, № 5 (1954), 731—734.

[3] В. М. Золотарев, Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов, Теория вероятн. и ее примен., 2, вып. 2 (1957), 256—266.

[4] В. М. Золотарев, Об аналитических свойствах устойчивых зконов, Вестн. Ленингр. ун-та., № 1 (1956), 49—52.

[5] И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.— Л., ГИТТЛ, 1951, 282.

[6] В. М. Золотарев, Выражение плотности устойчивого распределения с показателем α, большим единицы, через плотность с показателем $\frac{1}{\alpha}$, ДАН СССР, 98, № 5 (1954), 735—738.

MELLIN-STIELTJES TRANSFORMATIONS IN PROBABILITY THEORY

V. M. ZOLOTAREV (MOSCOW)

(*Summary*)

Mellin-Stieltjes transformations are very useful in solving problems in which products and ratios of random variables are encountered. The paper relates some general considerations pertaining to the application of these transformations (section 1), and also gives a concrete example of their use in studying analytical properties of stable distributions (section 2). In the first section the relationship between the Mellin-Stieltjes transformation, the unilateral Laplace-Stieltjes transformation and the characteristic function of a given distribution is established. For the sake of simplicity, all distributions in section 1 are considered as being continuous at zero. The concepts "cut" and equivalency of random variables are also determined there.

Any random variable having a distribution function

$$\widetilde{F}(x) = \frac{F(x) - F(0)}{1 - F(0)}, \quad x \geqslant 0; \quad \widetilde{F}(x) \equiv 0, \quad x \leqslant 0$$

is called *cut* $\widetilde{\xi}$ *of random variable* ξ having a distribution function $F(x)$. Cuts may also be considered as functions of an initial random variable ξ (two different representations of ξ are given as a function of ξ). Random variables ξ_1 and ξ_2 are considered as being equivalent and are designated as $\xi_1 \approx \xi_2$ if the distribution functions corresponding to them are equal.

The concepts of cuts and equivalency of random variables are systematically employed in the second section in establishing precise and limiting relationships in the class of stable distributions. Stable distributions naturally decompose into two analytically independent branches if the shift parameter γ is specially selected. For $\alpha \neq 1$ it is possible to determine an explicit expression of the Mellin transformation for these branches employing Euler's Γ-function. These two circumstances justify the use of the above mentioned concepts.

This explicit representation of Mellin's transformations in turn is used to determine a whole series of relationships between branches of stable distributions, in which all previously known relationships of the same type are special cases.

It should be noted that in paragraph 2.6 all random variables, which are written separately, are considered independent. The behavior of stable distributions near critical points $\alpha = 0$ and $\alpha = 1$ is investigated in the second section.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4
1957

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

НОМОГРАММА ДЛЯ НЕПОЛНОЙ Г-ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ χ^2.

С. В. СМИРНОВ и М. К. ПОТАПОВ

Существуют таблицы, дающие достаточно полную картину поведения неполной Г-функции и функции вероятности χ^2 ([1], [2]). Однако во многих прикладных вопросах требуются таблицы с небольшим числом знаков, но позволяющие быстро найти требуемое значение. Такие таблицы могут быть заменены номограммой. Здесь предлагается номограмма для функции вероятности

$$P(\chi^2, n) = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\chi}^{\infty} z^{n-1} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz, \tag{1}$$

связанной с неполной Г-функцией

$$\Gamma(m, y) = \int_0^y z^{m-1} e^{-z}\, dz$$

соотношением

$$P(\chi^2, n) = 1 - \Gamma(m, y),$$

где $n = 2m$, $\chi^2 = 2y$.

Впервые номограммы для функции вероятности были построены Г. З. Мошкиной [5]. Ее номограммы позволяют находить значения вероятности близкие к нулю или единице. Более детальное исследование показало, что для функции вероятности близки к нулю те номографические инварианты, точное равенство которых нулю необходимо и достаточно для существования точной номограммы Коши с прямыми шкалами [6] P и n. Это обеспечивает возможность приближенного номографирования наших функций в достаточно большой области, размеры которой указаны ниже.

Для построения номограммы функции (1) при $n \geqslant 30$ так же, как в таблицах Слуцкого [2], оказалась полезной замена переменных

$$t = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n}, \tag{2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

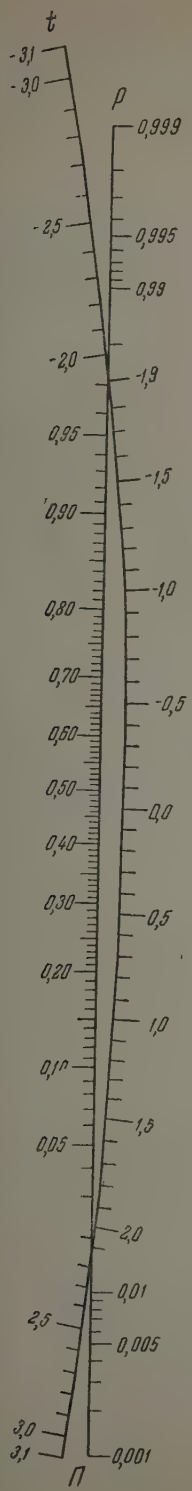
и переход к функции $\Pi(t, x) = P(\chi^2, n)$.

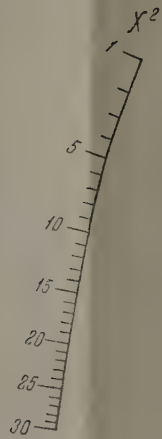
В качестве ответной шкалы номограммы взята шкала для функции распределения нормального закона

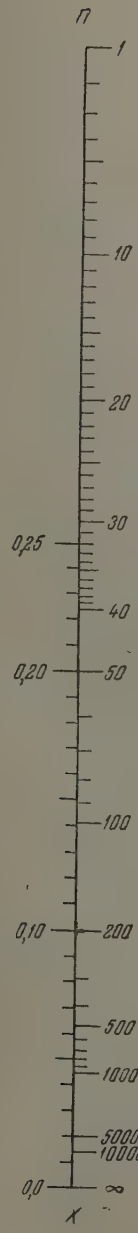
$$P(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz. \tag{4}$$

Шкала n есть равномерная шкала для функции (3).

Шкала t построена графически, как наилучшим образом приближающая данную зависимость при заранее произведенном выборе двух других шкал.


t
-3,1
-3,0
-2,5
-2,0
0,95
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,05
2,5
3,0
3,1
p
0,999
0,995
0,99
-1,9
-1,5
-1,0
-0,5
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
0,01
0,005
0,001
Π


χ²
1
5
10
15
20
25
30


n
1
10
20
30
0,25
40
0,20
50
100
0,10
200
500
1000
5000
10000
0,0
∞
χ

Для построения отмеченной значением t_0 точки шкалы t проводились прямые, соединяющие соответственные между собою при данном t_0 точки шкал n и P. Из совокупности этих прямых выбиралась какая-нибудь тройка, близкая к образующей чебышевский альтернанс при равномерном приближении данного уравнения нормальной формой Коши. В треугольнике, ограниченном этими прямыми, через одну из вершин проводилась прямая, пересекающая этот треугольник и параллельная шкалам P и n. Такая прямая только одна. Середина ее отрезка от вершины до противоположной стороны треугольника принималась за точку шкалы. Можно показать, что с достаточной степенью приближения это наилучшая точка шкалы, несущая данную отметку t_0.

Для $1 \leqslant n \leqslant 30$ выгоднее строить непосредственно номограмму функции $P(\chi^2, n)$. При этом ответная шкала может быть выбрана так же, как выше; шкала n оказывается близкой к равномерной и строится методом продолжения приближенной локальной номограммы, приближающей функцию в некоторой окрестности какой-нибудь ее линии уровня.

Метод заключается в следующем. По малому прямолинейному начальному отрезку шкалы n и заданной ответной шкале P строится отрезок шкалы χ^2 так же, как выше строилась шкала t. Теперь по этому отрезку восстанавливается продолжение шкалы n, потом снова возвращаются к шкале χ^2 и продолжают ее, и т. д. Метод основан на теореме единственности для номограмм из выравненных точек. Начальный кусок шкалы n может быть выбран, пользуясь методом приближенного номографирования в малом по М. А. Крейнесу и Н. Д. Айзенштат [3, 4] или по Е. Т. Сморкачеву [7].

Приведенная в этой заметке номограмма получена совмещением двух описанных выше номограмм в одном чертеже. При этом оказалось, что при надлежащем выборе масштаба на шкалах n эти две номограммы можно совместить так, что шкала n одной из них окажется продолжением шкалы n другой. Предлагаемая номограмма действует при следующих значениях n, t, χ^2 и P:

$$1 \leqslant n \leqslant \infty, \quad -3.1 \leqslant t \leqslant 3.1, \quad 1 \leqslant \chi^2 \leqslant 30; \quad 0.001 \leqslant P \leqslant 0.999.$$

Путем систематического сравнения ответов номограммы и таблиц получено, что абсолютная погрешность в средней части ответной шкалы P при $0.01 \leqslant P \leqslant 0.99$ не превышает 0,005, в концевых частях абсолютная погрешность не более 0,0005.

Способ вычерчивания номограммы

Выберем систему координат $\xi 0 \eta$ так, чтобы ось η была параллельна шкалам P и n и проходила посредине между ними, а ось ξ была перпендикулярна оси η и проходила через точки: на шкале n с отметкой $n = 32$ и $x = 0.25$, на шкале P с отметкой $P = 0.50$.

Шкала n		Шкала χ^2			Шкала t		
n	η	χ^2	η	ξ	t	η	ξ
30	0.050	30	0.029	0.423	3.0	—1.496	—1.049
25	0·188	25	0.124	0.436	2.5	—1.247	—1.016
20	0.335	20	0.230	0.451	2.0	—1.010	—0.990
15	0.491	15	0.348	0.472	1.5	—0.761	—0.970
10	0.674	10	0.488	0.499	1.0	—0.530	—0.957
9	0.714	9	0.521	0.505	0.5	—0.288	—0.948
8	0.754	8	0.554	0.511	0.0	—0.043	—0.943
7	0.797	7	0.589	0.521	—0.5	0.202	—0.944
6	0.842	6	0.626	0.531	—1.0	0.463	—0.952
5	0.890	5	0.666	0.542	—1.5	0.720	—0.973
4	0.942	4	0.709	0.554	—2.0	1.012	—1.004
3	1.002	3	0.758	0.579	—2.5	1.318	—1.048
2	1.071	2	0.817	0,591	—3.0	1.653	—1.099
1	1.157	1	0.894	0.629			

Половину расстояния между шкалами P и n примем за единицу, тогда:

1. Уравнение шкалы P будет $\xi = -1$, $\eta = G(P)$, где $G(P)$ — функция, обратная для функции (4), и соответствующая шкала легко строится по таблицам функции (4).

2. Уравнение шкалы n ($30 \leqslant n \leqslant \infty$) будет $\xi = 1$, $\eta = 6x - 1.5$, где x задано формулой (3). Остальные точки шкалы n, а также все точки шкал t и χ^2 построены графически способами, описанными выше.

Чтобы избежать при повторном вычерчивании довольно трудоемких построений, здесь приводятся координаты опорных точек шкал t, χ^2 и части шкалы n.

Вследствие погрешностей вычерчивания, возможны ошибки в две единицы последнего знака в приводимых ниже значениях координат, снятых с оригинала номограммы, выполненной в большом масштабе.

Правила пользования

1) Для вычисления P при $1 \leqslant \chi^2 \leqslant 30$, $1 \leqslant n \leqslant 30$ рассматриваются шкалы n, χ^2 и P.

2) Для вычисления P при $30 \leqslant n < \infty$, $30 \leqslant \chi^2 < \infty$ вычисляется предварительно t по формуле (2) и затем рассматриваются шкалы n, t и P.

Заметим, что для $20 \leqslant n \leqslant 30$ одновременно можно пользоваться шкалами n, t и P.

Поступила в редакцию
21.6.57

ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Pearson, Tables for the Incomplete Γ-Function, London, 1922.

[2] Е. Е. Слуцкий, Таблицы для вычисления неполной Γ-функции и функции вероятности χ^2, М.— Л., 1950.

[3] М. А. Крейнес и Н. Д. Айзенштат, О возможности номографирования с точностью до малых высшего порядка, ДАН СССР, **95**, № 6 (1954), 1137—1140.

[4] М. А. Крейнес и Н. Д. Айзенштат, О номографировании с точностью до малых высшего порядка, Матем. сб., **37** (1955), 337—352.

[5] Г. З. Мошкина, Приближенное номографирование по Коши и метод наименьших квадратов, Уч. зап. Ивановского госуд. пед. ин-та, **XIV**, 5 (1957).

[6] С. В. Смирнов, О номограммах Коши и Кларка, Уч. зап. Ивановского госуд. пед. ин-та, **XIV**, 5 (1957).

[7] Е. Т. Сморкачев, Локальное номографирование, ДАН СССР, **113**, № 4 (1957).

A NOMOGRAM FOR AN INCOMPLETE Γ-FUNCTION AND PROBABILITY FUNCTION χ^2

S. V. SMIRNOV, M. K. POTAPOV (MOSCOW)

(*Summary*)

A nomogram is constructed of the function $P(\chi^2, n) = 1 - \Gamma(m, y)$. For $n \geqslant 30$ the function Π is introduced, which is obtained from P by means of the transformation $t = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n}$, $x = \sqrt{\frac{2}{n}}$, while for $1 \leqslant n \leqslant 30$ the function P itself is considered.

The nomogram is valid for the following values of n, t, χ^2 and P: $1 \leqslant n \leqslant \infty$; $|t| \leqslant 3{,}1$; $1 \leqslant \chi^2 \leqslant 30$; $0.001 \leqslant P \leqslant 0.999$. The absolute error in the entire nomogram for $0.01 \leqslant P \leqslant 0.99$ is found not to exceed 0.005.

НЕЛИНЕЙНЫЙ КОНФЛЮЕНТНЫЙ АНАЛИЗ

П. П. КЛЕПИКОВ и *С. Н. СОКОЛОВ*

При обработке результатов экспериментов часто возникает задача о нахождении кривой с конечным числом степеней свободы, наилучшим образом аппроксимирующей совокупность найденных из опыта точек, и об определении оптимального числа степеней свободы такой кривой. Если точки в пространстве l измерений, полученные на опыте, имеют ошибки менее чем в l направлениях, то задача сводится к хорошо известному регрессионному анализу, согласно которому по известному направлению минимизируется сумма квадратов взвешенных отклонений точек от кривой. В случае же наличия экспериментальных погрешностей в измерении всех координат точек, например, при измерении интенсивности рассеяния пучка частиц в интервал углов, определяемый угловым разрешением детектора, задача становится значительно сложнее, поскольку направление минимизации становится не известным заранее. Проблемы такого рода относятся к *конфлюентному анализу*, так как они эквивалентны случаю, когда $l+1$-е измерение, при наличии которого анализ был бы регрессионным, сливается в одну единственную точку или, что то же самое, когда все рассматриваемые величины не зависят от $l+1$-й координаты. Возможны случаи, когда величина, свободная от ошибок, не является независимой переменной, и регрессионный анализ удобно заменять конфлюентным. В литературе до сих пор описаны лишь методы линейного конфлюентного анализа [1, 2, 3].

Воспользуемся методом максимума правдоподобия *. Согласно этому методу следует искать генеральную совокупность всех возможных результатов измерений данных величин, имеющую такие параметры, при которых функция правдоподобия, равная плотности вероятности появления экспериментально найденных величин, была бы максимальной.

При наличии случайно действующих возмущений результаты наблюдения каждой точки кривой $\mathbf{y}(x)$ в пространстве $l+1$ измерений (независимая переменная x и l компонент вектора $\mathbf{y}$) будут иметь некоторую функцию распределения $f(x, x_0; \mathbf{y}, \mathbf{y}_0)$, где x, $\mathbf{y}$ — координаты точки на кривой, а x_0, $\mathbf{y}_0$ — координаты, полученные при измерении. Часто имеется основание считать распределение нормальным. Тогда

$$f(x, x_0; \mathbf{y}, \mathbf{y}_0) = \frac{1}{\sigma_x}\sqrt{\frac{|w|}{(2\pi)^{l+1}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma_x}\right)^2 - \frac{1}{2}(y_\mu - y_{0\mu})\,w_{\mu\nu}\,(y_\nu - y_{0\nu})\right\}^{**}, \quad (1)$$

где σ_x — стандартная ошибка распределения в направлении оси x, $w_{\mu\nu}$ — матрица весов в направлении остальных осей и $|w|$ — определитель этой матрицы. Мы ограничимся в дальнейшем изложении случаем нормального распределения как наиболее важным, причем не будем рассматривать корреляции между величиной x, с одной стороны, и вектором $\mathbf{y}$, с другой; компоненты вектора $\mathbf{y}$ могут быть коррелированы произвольным образом.

Плотность вероятности появления наблюдения в точке x, $\mathbf{y}$ есть взвешенная сумма плотностей, происходящих от всех точек кривой $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$, т. е. интеграл

$$F[\mathbf{y}] = \int ds f(x, x_0; \mathbf{y}, \mathbf{y}_0)\,\varphi(s), \quad (2)$$

взятый вдоль всей кривой, причем ds предполагается имеющим ту же размерность, что и dx. Функция $\varphi(s)$ определяет относительный вклад различных элементов кривой; в дальнейшем мы считаем, что $\varphi = 1$. Если распределение имеет вид (1), то приведение всех членов ds^2 к одинаковой размерности дает

$$ds^2 = dx^2 + \sigma_x^2 dy_\mu w_{\mu\nu} dy_\nu.$$

---

* См., например, [4], гл. 8, § 8.

** Знак суммирования в (1), как и в дальнейших формулах, опускается.

Покажем теперь, что при некоторых ограничениях, которые часто имеют место, нелинейный конфлюентный анализ можно свести путем последовательных приближений к последовательности регрессионных. Предположим, что на участке кривой, лежащем в области с размерами порядка $\frac{\sigma_x}{\sqrt{|w|}} \sim \sigma_x \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \ldots \sigma_{y_l}$, наклон и кривизна этой кривой меняются мало. Тогда в интеграле (2) в случае нормального распределения основной вклад дает участок кривой около точки x_0, y_0. Последнее обстоятельство позволяет вести расчет последовательными приближениями. Начальное приближение часто может быть найдено на-глаз, и скорость сходимости, естественно, зависит от того, насколько удачно это нулевое приближение. Сходимость последовательных приближений нами не доказывается, она проверена на ряде упомянутых ниже вычислений.

На участке кривой около точки x_0, y_0 функцию $\mathrm{y}(x)$ можно приближенно представить в виде

$$\mathrm{y}(x) = \mathrm{y}(x_0) + \mathrm{y}'(x_0)(x - x_0) + \mathrm{y}''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}. \qquad (3)$$

Подставляя теперь (3) в (2), принимая ради простоты записи точку x_0, y_0 за начало координат, вычисляя интеграл в предположении, что $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{y\mu}} y''_\mu \ll 1$ для всех μ и ограничиваясь только членами первого порядка по этим величинам, найдем

$$F[\mathrm{y}] = \sqrt{\frac{|w|}{(2\pi)^l}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y_\mu + \alpha_\mu) W_{\mu\nu} (y_\nu + \alpha_\nu)\right\}, \qquad (4)$$

где измененный вес равен

$$W_{\mu\nu} = w_{\mu\nu} - \frac{(w\mathrm{y}'_0)_\mu \sigma_x^2 (\mathrm{y}'_0 w)_\nu}{1 + \sigma_x^2 \mathrm{y}'_0 w \mathrm{y}'_0} + \frac{(w\mathrm{y}'_0)_\mu \sigma_x^4 (\mathrm{y}^0 w \mathrm{y}'_0)(\mathrm{y}'_0 w)_\nu}{(1 + \sigma_x^2 \mathrm{y}'_0 w \mathrm{y}'_0)^2} -$$

$$- \frac{(w\mathrm{y}'_0)_\mu \sigma_x^6 (\mathrm{y}^0 w \mathrm{y}'_0)(\mathrm{y}'_0 w \mathrm{y}''_0)(\mathrm{y}'_0 w)_\nu}{(1 + \sigma_x^2 \mathrm{y}'_0 w \mathrm{y}'_0)^3} \qquad (5)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2 \mathrm{y}''_0}{1 + \sigma_x^2 \mathrm{y}'_0 w \mathrm{y}'_0} \qquad (6)$$

является сдвигом точки y_0. Обозначения y^0, y'_0 и y''_0 указывают на то, что эти величины берутся в точке $x = x_0$ на основании предыдущего приближения. Если кривая имеет конечную длину и точка лежит близко к концу кривой, возникает соответствующая поправка. В случае необходимости можно подобным образом учесть дальнейшие члены разложения (3) и степени малых величин. В простейшем случае одной зависимости переменной y мы получим

$$F[y] = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\left[y + \frac{1}{2}\frac{y''_0 \sigma_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 y_0'^2}\right]^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 y_0'^2} \left[1 + y''_0 y^0 \left(\frac{y'_0 \sigma_x^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 y_0'^2}\right)^2\right]\right\}. \qquad (7)$$

Функция правдоподобия равна произведению функционалов (2), взятому по всем экспериментальным точкам, относящимся к данной кривой. Если взять эти функционалы в форме (7), то функция правдоподобия будет содержать в показателе сумму квадратов отклонений точек от кривой по вертикали, но с той разницей, что точки y_0 нужно сдвинуть на некоторую малую величину и взять измененный вес.

Таким образом, в рассмотренном случае расчетно-конфлюентная задача сводится к регрессионной. Заметим, что при $\sigma_x \to 0$ все формулы переходят в формулы обычного регрессионного анализа.

Применимость метода максимума правдоподобия к нелинейному конфлюентному анализу не ограничивается использованными нами условиями нормальности распределения ошибок и малости второй производной. Функция правдоподобия может быть записана в виде произведения интегралов вдоль кривой для любого распределения и для любой кривой, однако в общем случае придется подбирать параметры кривой, например, с помощью электронной счетной машины, не делая никаких предположений о кривизне линии регрессии. Вопрос о способе нахождения начального приближения и о характере сходимости последовательных приближений в общем случае остается открытым.

В следующей статье, которая будет опубликована в другом журнале, мы дадим пример применения изложенного метода к обработке экспериментальных данных по рассеянию π^+-мезонов протонами.

Авторы благодарны проф. Н. В. Смирнову и проф. Я. А. Смородинскому за ценные дискуссии по поводу данной работы.

Объединенный Институт
Ядерных Исследований

Поступила в редакцию
11. 7. 57

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Frisch, Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems, Oslo, 1934.

[2] A. Wald, The Fitting of Straight Lines of Both Variables Are Subject to Errors, Ann. Math. Statistics, **11**, (1940), 284.

[3] O. Reiersöl, Confluence Analysis by Means of Instrumental Sets of Variables, Ark. för Mat., Astr. och Fysik, **32** A, No, 4 (1945).

[4] А. Хальд, Математическая статистика с техническими приложениями, М., 1956.

NON-LINEAR CONFLUENCE ANALYSIS

N. P. KLEPIKOV, S. N. SOKOLOV (MOSCOW)

(*Summary*)

Non-linear confluence analysis, necessary for the treatment of experimental data when all variables are subject to errors, is considered from the standpoint of the maximum likelihood method. The likelihood function is a product of curvilinear integrals of the respective distribution densities of each point of the curve. For a sufficiently small curvature and a normal error distribution, these integrals are evaluated approximately, resulting in distribution functions of the normal type but with modified weights and shifted experimental points. Thus, a confluent problem is reduced to an ordinary regressional one. Weight modifications and point shifts may be found by means of successive approximations.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. В. ПРОХОРОВ, М. ФИШ

1. Цель настоящей заметки состоит в распространении теоремы Полиа [2] на случайные элементы в Гильбертовом пространстве.

2. Под случайными элементами ξ со значениями из вещественного сепарабельного пространства Гильберта H мы понимаем измеримые отображения (см. [1] гл. 1) $\xi(u)$ основного поля вероятностей в пространство H. Распределение вероятностей случай-

ного элемента ξ и его характеристический функционал мы будем обозначать через $\mathbf{P}^{\xi}$ и $\chi(f, \xi)$ соответственно:

$$\chi(f, \xi) = \int_H e^{i(f, x)}\, d\mathbf{P}^{\xi} \qquad f \in H.$$

Соотношение $\mathbf{P}^{\xi} = \mathbf{P}^{\eta}$ мы будем записывать также в виде $\xi \sim \eta$. Если ξ — случайный элемент, то $\|\xi\|$ и линейные функционалы

$$(f, \xi), \quad f \in H \tag{1}$$

будут случайными величинами.

Распределение $\mathbf{P}^{\xi}$ называют нормальным, если все случайные величины (1) имеют нормальное распределение ([3], [4]). *Математическим ожиданием случайного элемента* ξ называют такой элемент $\mathbf{M}\xi \in H$, что для любого $f \in H$

$$\mathbf{M}(f, \xi) = (f, \mathbf{M}\xi).$$

В дальнейшем мы ограничиваемся лишь такими случайными элементами ξ, для которых

(α) $\quad \mathbf{M}\|\xi\|^2 < \infty$,

(β) $\quad \mathbf{M}(f, \xi)^2 > 0$ для любого $f \in H$, $f \neq \theta$,

(γ) $\quad \mathbf{M}\xi = \theta$,

где θ — нулевой элемент в H (существование $\mathbf{M}\xi$ вытекает из (α)).

Теорема 1. *Пусть*

$$\xi^{(1)} \sim \xi^{(2)} \sim \xi^{(3)} \tag{2}$$

— случайные элементы в H, подчиненные условиям (α), (β), (γ) *и условиям*

(δ) $\quad \xi^{(1)}$ *и* $\xi^{(2)}$ *независимы,*

(ε) $\quad \xi^{(1)} + \xi^{(2)} \sim A\xi^{(3)}$,

где A — ($A1$) линейный, ($A2$) ограниченный, ($A3$) самосопряженный, ($A4$) положительный оператор в H.

Тогда распределение $\mathbf{P}$ *каждого из случайных элементов* $\xi^{(i)}$ *нормально и $A = \sqrt{2}\, E$, где E — единичный оператор.*

3. Доказательство теоремы 1. Входящую в условие (β) квадратичную форму $\mathbf{M}(f, \xi)^2$ можно записать в виде (Sf, f), где S — некоторый ограниченный линейный оператор (аналогичный матрице вторых моментов конечномерного распределения), причем в силу (β)

$$(Sf, f) > 0 \quad \text{для} \quad f \neq \theta. \tag{3}$$

Из условий (δ), (γ), (ε) и самосопряженности A вытекает равенство

$$\mathbf{M}(\xi^{(1)}, f)^2 + \mathbf{M}(\xi^{(2)}, f)^2 = \mathbf{M}(A\xi, f)^2 = \mathbf{M}(\xi, Af)^2,$$

т. е. в других обозначениях

$$2(Sf, f) = (SAf, Af). \tag{4}$$

Полагая $A_1 = \dfrac{A}{\sqrt{2}}$, получаем

$$(Sf, f) = (SA_1 f, A_1 f). \tag{5}$$

Из (5) выводим, что при каждом натуральном n

$$(Sf, f) = (SA_1^n f, A_1^n f). \tag{6}$$

Пусть E_λ — «разложение единицы», соответствующее оператору A_1 и $f \in E_{1-\varepsilon}H$, $\varepsilon > 0$. Тогда при $n \to \infty$

$$A_1^n f = \int_0^{1-\varepsilon} \lambda^n dE_\lambda f \to \theta.$$

и в силу (6) $(Sf, f) = 0$, т. е. $f = \theta$. Иными словами, при каждом $\varepsilon > 0$ подпространство $E_{1-\varepsilon}$ состоит из единственного элемента θ. Следовательно, спектр A_1 лежит на полупрямой $[1, \infty)$.

Оператор A^{-1} определен всюду в H и удовлетворяет тем же условиям $(A1 - 4)$, что и A. Подставляя вместо f в формулу (5) $g = A_1^{-1} f$, мы приходим к соотношению

$$(Sf, f) \equiv (SA_1^{-1} f,\ A_1^{-1} f),$$

откуда, подобно предыдущему, заключаем, что спектр A_1^{-1} лежит на полупрямой $[1, \infty)$. Из сказанного вытекает, что спектр состоит ровно из одной точки $\lambda = 1$, т. е. $A_1 = E$ и

$$A = E \cdot \sqrt{2}. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь последовательность независимых случайных элементов

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots,$$

которые имеют одно и то же распределение $\mathbf{P}$. Из (ε) нетрудно извлечь, что

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{2^n}}{\sqrt{2^n}} \sim \frac{A^n}{\sqrt{2^n}} \xi^{(3)} = \xi^{(3)}.$$

По теореме Мурье [4] при $n \to \infty$ распределения $\mathbf{P}^{\eta_n}$ слабо сходятся к нормальному распределению $\mathbf{P}_*$ в H с характеристическим функционалом

$$\chi(f) = e^{-\frac{1}{2} M(\xi, f)^2}.$$

Поскольку $\mathbf{P}^{\eta_n} = \mathbf{P}$ при каждом n, то и $\mathbf{P}_* = \mathbf{P}$, что и требовалось доказать.

Поступила в редакцию
25. 3. 57

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., ГИТТЛ, 1949.
[2] G. Polya, Herleitung des Gausschen Gesetzes aus einer Funktionalgleichung, Math. Z., B. 18 (1923), 96—108.
[3] A. Kolmogoroff, La transformation de Laplace dans les espaces linéaires, C. R. Akad. Sci., 200 (1935), 1717.
[4] E. Mourier, Eléments aléat ires dans un espace de Banach, Thèse., Paris, 1954.

A CHARACTERISATION OF NORMAL DISTRIBUTIONS IN HILBERT SPACE

Yu. V. PROHOROV (MOSCOW) and M. FISH (WARSAW)

(*Summary*)

Theorem 1 gives an extension of the well known result of [2] to the case of random elements in Hilbert space.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, СДЕЛАННЫХ НА ЗАСЕДАНИЯХ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО СЕМИНАРА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(Москва, февраль — май 1957 г.)

A SUMMARY OF PAPERS PRESENTED AT THE SESSIONS OF THE SCIENTIFIC RESEARCH SEMINAR ON THE THEORY OF PROBABILITIES

(Moscow, February — May, 1957)

Заседание 12 февраля.

Колмогоров А. Н. **К теории случайных процессов (Общие определения регулярности и сингулярности, количество информации на единицу времени).** (Kolmogorov A. N., On stochastic processes. (General definitions of regularity and singularity. The amount of information per unit of time).

Фрейман Г. А. (Елабуга), **Локальные предельные теоремы для больших уклонений от среднего значения и их применения в теории чисел** (Freiman G. A. (Elabuga), Local limit theorems for large deviations from the mean and their application to number theory).

Теорема. *Для числа решений $I_{N,k}$ уравнения $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = N$ при $k \to \infty$ и $k < \gamma N$, где $0 < \gamma < 1$, N — целое положительное число, имеет место следующая асимптотическая формула*

$$I_{N,k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k D\xi}}\, e^{\sigma N} \Phi^k(\sigma) \left(1 + o\left(\frac{1}{k^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right)\right),$$

где σ определяется соотношениями

$$\frac{N}{k} = \frac{\sum_{x=1}^{\infty} x^n e^{-\sigma x^n}}{\sum_{x=1}^{\infty} e^{-\sigma x^n}},$$

$$\Phi(\sigma) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{-\sigma x^n}, \quad P_x = e^{-\sigma x^n} \Phi^{-1}(\sigma).$$

ξ — случайная величина, принимающая значения x^n ($x = 1, 2, 3, \ldots$) с вероятностями P_x, ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, О суммах положительных случайных величин, ДАН СССР, **71**, № 6 (1950), 1037.

[2] А. Г. Постников, Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых, Изв. АН СССР, сер. матем., № 6, 1956.

Заседание 26 февраля.

Линник Ю. В. (Ленинград), **Некоторые замечания по методу наименьших квадратов с приложением к теории засечек** (Linnik U. V. (Leningrad), Some remarks on least squares in connection with location theory).

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», том II, вып. 3.

Бобров А. А. (Одесса), **Метод произвольных функций в обосновании предельных распределений** (Bobrov A. A. (Odessa), A method of arbitrary functions in ground of limit distributions).

Рассматривается детерминированный процесс, имеющий, однако, случайные «начальные условия»; интересующее нас состояние системы определяется величиной $s = F(v, \tau)$, зависящей от случайного параметра v и параметра τ, характеризующего систему в каком-нибудь определенном отношении (коэффициент трения, сопротивление среды и пр., τ может быть также функцией, кривой, вообще элементом произвольной природы).

Ставится вопрос: при каких условиях, налагаемых на $F(v, \tau)$ при приближении параметра τ к «критическому значению» τ_0 закон распределения вероятностей величины s приближается к какому-нибудь закону распределения $\varphi(x)$, не зависящему от распределения вероятностей случайного параметра v, предполагаемого произвольным, но абсолютно непрерывным?

Можно доказать ряд теорем, дающих ответ на поставленный вопрос. Приведем одну из них.

Теорема. *Для того, чтобы при* $\tau \to \tau_0$ *величина* $F(v, \tau)$ *имела предельное распределение*

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \mathbf{P}\{F(v,\tau) < x\} = \varphi(x), \tag{1}$$

не зависящее от распределения параметра v, *необходимо и достаточно выполнение условий:*

1) для любых $\varepsilon > 0$, $v_1 < v_2$ можно указать такое $N > 0$, для которого выполняется неравенство $\operatorname{mes}\{|F| \geqslant N\}_{v_1}^{v_2} < \varepsilon$ при всех τ достаточно близких к τ_0;

2) для любых вещественных t и $v_1 < v_2$ существует предельное среднее значение

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} e^{itF(v,\tau)} dv = f(t),$$

не зависящее от произвольно взятого интервала (v_1, v_2). При этом функция $f(t)$ является характеристической функцией для предельной функции распределения $\varphi(x)$.

Во многих случаях интерес представляет не сама величина $s = F(v, \tau)$, а ее *дробная часть* по отношению к какой-нибудь величине $l > 0$ («угловая величина»); проведена теорема, дающая ответ на следующий вопрос: при каких условиях при $\tau \to \tau_0$ предельное распределение $\varphi(x)$ такой дробной части будет *равномерным на* $(0, l)$.

Приложение к фрикционным системам. Пусть состояние системы описывается «фрикционным» дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \tau f\left(\frac{ds}{dt}\right) = 0, \tag{2}$$

где $f > 0$, $\tau > 0$ — коэффициент трения, с начальными условиями $s|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0} = v > 0$ — случайная величина. Пусть $s = F(v, \tau)$ характеризует какое-нибудь определенное состояние системы (например, пройденный путь до положения покоя, «возврата» и т. п.). Тогда, для того, чтобы при $\tau \to 0$ дробная часть величины $s = F(v, \tau)$ имела предельным законом распределения равномерный закон, достаточно, чтобы функция $f(v)$ в дифференциальном уравнении (2) имела *ограниченное изменение на любом интервале* (v_1, v_2), $v_1 > 0$.

Заседание 5 марта.

Чистяков В. П., Две локальные предельные теоремы для ветвящихся случайных процессов (Čistyakov V. P., Two local limit theorems for branching stochastic processes).

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», том II, вып. 3.

Заседание 12 марта.

Ченцов Н. Н., Некоторые общие приемы доказательства предельных теорем для случайных феноменов (Čentsov N. N., Some general methods in proving limit theorems for stochastic phenomena).

Будем называть случайным феноменом распределение вероятностей в некотором множестве A функций, заданных на элементах t произвольного множества T и принимающих значения $x(t)$ в некотором топологическом пространстве R. Примерами случайных феноменов могут служить случайные процессы, случайные поля, случайные меры и т. п. Мы будем предполагать, что пространство R — локально-бикомпактное и имеет счетную базу. Будем предполагать также, что случайный феномен задается

своими конечномерными булевскими распределениями, которые согласованы соответствующим образом. В этом случае удобно считать, что распределение вероятностей задано в пространстве R^T всех функций $x(t)$. Если в пространство R^T ввести тихоновскую топологию, то появляется возможность говорить о слабой сходимости случайных феноменов. В сделанных нами предположениях она совпадает со слабой сходимостью конечномерных распределений. Однако обычно класс функционалов, непрерывных в тихоновской топологии, является чересчур узким, и наибольший интерес представляют функционалы, которые не только разрывны, но даже не всюду определены.

Пусть интересующий нас функционал $\Phi[x(\cdot)]$ обладает следующим свойством. Для каждого набора τ аргументов $t_1, \ldots, t_k$ можно задать непрерывный функционал $\Phi_\tau[x(\cdot)]$, зависящий только от $x(t_1), \ldots, x(t_k)$, причем так, что на некотором множестве $B \leqslant A \subseteq R^T$ было

$$\Phi[x(\cdot)] = \lim_{\tau} \Phi_\tau[x(\cdot)],$$

где $\tau' > \tau''$ при $\tau' \supset \tau''$.

Тогда достаточные условия слабой сходимости $\Phi[\xi_n(\cdot)]$ можно получить на следующем пути.

Метод 1. *Пусть заданы феномены* $\xi_n(\cdot) \Rightarrow \xi_0(\cdot)$, *причем* $\mathbf{P}\{\xi_n(\cdot) \in D\} = 1$; *и пусть для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\tau, n} \mathbf{P}\{\| \Phi_\tau[\xi_n(\cdot)] - \Phi[\xi_n(\cdot)] \| > \varepsilon\} = 0. \tag{1}$$

Тогда $\Phi[\xi_n(\cdot)] \Rightarrow \Phi[\xi_0(\cdot)]$.

Достаточное условие типа (1) приходится использовать, когда предельный феномен $\xi_0(\cdot)$ обладает большей степенью регулярности по отношению к функционалу Φ, чем $\xi_n(\cdot)$ (например, когда $\xi_0(\cdot)$ — процесс с непрерывными траекториями, а $\xi_n(\cdot)$ — нет). Обычно же можно использовать более ограничительное условие.

Метод 2. *Пусть* $\xi_n(\cdot) \Rightarrow \xi_0(\cdot)$, *причем для любого* $\eta > 0$ *существует* B_η, *такое, что* $\Phi_\tau[x(\cdot)] \Rightarrow \Phi[x(\cdot)]$ *равномерно по всем* $x(\cdot) \in B_\eta$ *и при всех* n $\mathbf{P}\{\xi_n(\cdot) \in B_\eta\} > 1 - \eta$. *Тогда* $\Phi[\xi_n(\cdot)]$ *существует почти всегда и* $\Phi[\xi_n(\cdot)] \Rightarrow \Phi[\xi_0(\cdot)]$.

Если в множестве B можно ввести топологию S так, чтобы оно стало локально-бикомпактным пространством со счетной базой (обычные аксиомы отделимости могут при этом не выполняться), то для функционалов Φ, непрерывных к топологии S, можно эффективно построить систему аппроксимирующих функционалов Φ_τ, и получить теоремы типа теорем Скорохода [1] и Прохорова [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Скороход, Предельные теоремы для случайных процессов, Теор. вероятн. и ее прим., I, в. 3 (1956), 289—319.

[2] Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теор. вероятн. и ее прим., I, в. 2 (1956), 177—238.

Добрушин Р. Л., Некоторые классы однородных счетных процессов (Dobrushin R. L., Certain classes of homogeneous denumerable Markov processes)

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», том II, вып. 3.

Заседание 19 марта.

Розанов Ю. А., О линейном интегрировании многомерных стационарных последовательностей в гильбертовом пространстве (Rozanov U. A., On linear interpolation of multi-dimensional stationary sequences in Hilbert space).

Содержание доклада опубликовано в ДАН СССР, том 116, вып. 6 (1957), 923—927.

Добрушин Р. Л. По поводу формулировки основной теоремы Шеннона (Dobrushin R. L., On formulating Shannon's fundamental theorem).

В работе Шеннона, заложившей основы теории информации, намечены формулировка и доказательство основной теоремы, описывающей условия, в которых возможна

передача информации в длительно действующем канале связи. В дальнейшем появились работы Мак-Милана, Хинчина, Розенблат-Рота, посвященные точной математической интерпретации и строгому доказательству теоремы Шеннона. Все эти работы относятся к случаю, когда подлежит передаче сообщение с конечной энтропией и требуется передать это сообщение с малой вероятностью ошибки. Колмогоров подчеркнул в своем недавном докладе важность другой идеи, также заложенной в работе Шеннона и состоящей в том, что, когда передаче подлежит сообщение с бесконечной энтропией, то естественно требовать лишь, чтобы различие полученного сообщения от передаваемого было мало в среднем при некотором разумном способе измерения этого различия. Колмогоров придал этому вопросу характер четко поставленной математической проблемы. Здесь будет дано в некоторых условиях решение этой проблемы.

Приведем формулировку интересующей нас проблемы, указанную Колмогоровым. (Для удобства мы чуть-чуть уменьшаем ее общность.) Подлежащее передаче сообщение — это случайная величина ξ, принимающая значение в некотором пространстве X. Далее задано пространство $\widetilde{X}$ вместе с некоторым классом V распределений пар величин $(\xi, \widetilde{\xi})$, где $\widetilde{\xi}$ принимает значения из $\widetilde{X}$, причем требуется, чтобы сообщение $\widetilde{\xi}$, возникшее после передачи по каналу сообщения ξ, было таково, что распределение пары $(\xi, \widetilde{\xi})$ принадлежит V. Канал задается как совокупность двух абстрактных пространств Y и $\widetilde{Y}$ и функций $P(y, B)$, где $y \in Y$, $B \subset \widetilde{Y}$, задающей распределение сигнала на выходе канала, возникающее, если на вход канала подан сигнал y. (Мы опускаем здесь и в дальнейшем оговорки о необходимых предположениях измеримости.) Мы будем говорить, что сообщение ξ может быть передано с точностью V по нашему каналу, если существуют случайные величины η, $\widetilde{\eta}$, $\widetilde{\xi}$, принимающие соответственно значения в Y, $\widetilde{Y}$, $\widetilde{X}$ такие, что

1) последовательность четырех величин ξ, η, $\widetilde{\eta}$, $\widetilde{\xi}$ образует цепь Маркова,
2) условное распределение $\widetilde{\eta}$ при условии η задается функцией $P(y, B)$,
3) распределение пары $(\eta, \widetilde{\eta})$ принадлежит классу V.

Пусть заданы две случайных величины ζ и $\widetilde{\zeta}$, принимающие значения соответственно в пространствах Z и $\widetilde{Z}$. Пусть $P_\zeta(dz)$, $P_{\widetilde{\zeta}}(d\widetilde{z})$ и $P_{\zeta,\widetilde{\zeta}}(dz, d\widetilde{z})$, соответственно, распределения ζ, $\widetilde{\zeta}$ и совместное распределение ζ и $\widetilde{\zeta}$. Пусть далее $P_\zeta(dz) \cdot P_{\widetilde{\zeta}}(d\widetilde{z})$ распределение на $Z \times \widetilde{Z}$, являющееся прямым произведением распределений $P_\zeta(dz)$, $P_{\widetilde{\zeta}}(d\widetilde{z})$. Если информация $I(\zeta, \widetilde{\zeta})$ конечна, то (Гельфанд и Яглом) мера $P_{\zeta,\widetilde{\zeta}}(dz, d\widetilde{z})$ абсолютно непрерывна относительно распределения $P_\zeta(dz) \cdot P_{\widetilde{\zeta}}(d\widetilde{z})$ и задается при этом некоторой плотностью $a(z, \widetilde{z})$ относительно меры $P_\zeta(dz)\, P_{\widetilde{\zeta}}(d\widetilde{z})$, причем информация

$$I(\zeta, \widetilde{\zeta}) = \int \log a(z, \widetilde{z})\, P_{\zeta,\widetilde{\zeta}}(dz, d\widetilde{z}).$$

Пусть

$$C(V) = \inf_{(\zeta,\widetilde{\zeta}) \in V} I(\zeta, \widetilde{\zeta})$$

и

$$H = \sup I(\eta, \widetilde{\eta}),$$

где верхняя грань берется по всевозможным величинам η, принимающим значения из y, а $\widetilde{\eta}$ связано с η при помощи условного распределения $P(y, B)$. Нетрудно показать, что необходимое условие для возможности передать сообщение ξ состоит в том, чтобы $C \leqslant H$. Проблема, поставленная А. Н. Колмогоровым, состоит в том, чтобы показать, что в некотором разумном асимптотическом смысле верно и обратное утверждение.

Мы назовем последовательность пар $(\zeta_T, \widetilde{\zeta}_T)$ случайных величин регулярной, если при всех T: $I(\zeta_T, \widetilde{\zeta}_T) < \infty$ и

$$\frac{\log a_T(\zeta_T, \widetilde{\zeta}_T)}{I(\zeta_T, \widetilde{\zeta}_T)} \to 1,$$

при $T \to \infty$, где $a_T(z, \widetilde{z})$ определено так же, как выше определено $a(z, \widetilde{z})$, и сходимость происходит по вероятности относительно совместных распределений $P_{\zeta,\widetilde{\zeta}}(dz, d\widetilde{z})$.

Теорема. *Пусть вся совокупность введенных выше объектов зависит от индекса T. Если при любом T*

1) *заданы неотрицательные равномерно ограниченные функции двух переменных $\rho_T(x, \widetilde{x})$ и для любого положительного числа u множество $V_T(u)$ состоит из всех распределений пар $(\xi_T, \widetilde{\xi}_T)$ таких, что*

$$M\rho_T(\xi_T, \widetilde{\xi}_T) \leqslant u, \tag{1}$$

2) *существует регулярная последовательность величин $(\eta_T, \widetilde{\eta}_T)$, связанных условным распределением $P_T(y, B)$ такая, что при $T \to \infty$*

$$\frac{I(\eta_T, \widetilde{\eta}_T)}{H_T} \to 1,$$

3) *для некоторой последовательности чисел u_T существует регулярная последовательность случайных величин $(\xi_T, \widetilde{\xi}_T)$ такая, что их распределение принадлежит $V_T(u_T)$*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{I(\xi_T, \widetilde{\xi}_T)}{C(V_T(u_T))} = 1$$

4)

$$\lim_{T\to\infty} H_T = \infty$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{C(V_T(u_T))}{H_T} < 1,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших T сообщение η может быть передано с точностью $V_T(u_T + \varepsilon)$.

Теорема останется верной, если предположить, что задана при каждом T целая система функций $\rho_T^i(x, \widetilde{x})$, $i = 1, \ldots N$, причем окрестность V_T выделяется требованием одновременного выполнения всех условий вида (1) и возможны также некоторые обобщения на случай неограниченных оценок $\rho(x, y)$.

Заседание 26 марта.

Хасьминский Р. З., Вероятностный подход к краевым задачам для эллиптических и параболических уравнений (Hasminski R. Z., A probability approach to boundary problems for elliptical and parabolic equations).

1. Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

в области D, ограниченной прямыми $x = 0$, $x = l$; $t = 0$, $t = T$. Предположим, что внутри области D коэффициенты a и b имеют три непрерывных производных по всем аргументам и $a(x, t) > 0$, а при приближении к границе $x = 0$ $b(x, t)$ и $a(x, t)$ могут быть неограниченными и $a(x, t)$ может стремиться к нулю. Изучается вопрос: когда надо задавать граничные условия для 1-ой краевой задачи при $x = 0$. Подобный вопрос для эллиптических уравнений изучается в работах [1], [2], [3].

Введем обозначения:

$$\overline{B} = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \frac{b(x, t)}{a(x, t)}; \quad \overline{a}(x) = \max_{0\leqslant t\leqslant T} a(x, t); \quad \overline{W} = e^{\int_x^{x_0} \overline{B}(y)dy}$$

$$\underline{B} = \min_{0\leqslant t\leqslant T} \frac{b(x, t)}{a(x, t)}; \quad \underline{a}(x) = \min_{0\leqslant t\leqslant T} a(x, t); \quad \underline{W} = e^{\int_x^{x_0} \underline{B}(y)dy}$$

$$\overline{Z} = \overline{W}(x) \cdot \int_x^{x_0} \overline{W}^{-1}(y)\,\underline{a}^{-1}(y)\,dy$$

$$\underline{Z} = \underline{W}(x) \cdot \int_{x}^{x_0} \underline{W}^{-1}(y)\, \overline{a}^{-1}(y)\, dy$$

Используя вероятностные наводящие соображения, можно сформулировать, например, следующие теоремы:

Теорема 1. *Если функция* $\overline{Z}(x)$ *интегрируема в окрестности точки* $x = 0$, *то существует единственное решение уравнения* (1), *принимающее заданные значения на границе* $x = 0$; $t = 0$ *и* $x = l$.

Теорема 2. *Если функция* $\underline{Z}(x)$ *не интегрируема в точке* $x = 0$, *то существует единственное решение уравнения* (1), *принимающее заданные значения лишь при* $t = 0$ *и* $x = l$.

Доказательство теорем 1 и 2 легко провести с помощью метода барьеров. В случае a и b, не зависящих от времени, теоремы 1 и 2 полностью решают вопрос о том, когда надо и когда не надо задавать граничное условие при $x = 0$

2. Аналогичные результаты справедливы для общего линейного эллиптического уравнения, а также для уравнения с правой частью.

3. Не представляет труда обобщить результаты на большее число измерений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области, ДАН СССР, **77**, № 2 (1951), 181—183.

[2] О. А. Олейник, Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области, ДАН СССР, **87**, № 6, (1952), 885—888.

[3] М. И. Вишик, Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области, Матем. сб., **35**, № 3 (1954), 513—568.

Яглом А. М. Обобщенные локально однородные случайные поля. (Yaglom A. M., Generalized locally homogeneous stochastic fields).

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», том II, вып. 3.

Заседание 9 апреля.

Серегин Л. В., Условия непрерывности с вероятностью 1 строго марковских процессов (Seregin L. V., Continuity conditions with unit probability of strictly Markov processes).

Содержание доклада публикуется в журнале «Теория вероятностей и ее применения».

Юшкевич А. А., Строго марковские процессы (Yushkevič A. A. Strong Markov processes).

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», том II, вып. 2.

Заседание 16 апреля.

Тихомиров В., Об ε-энтропии для некоторых классов аналитических функций (Tihomirov V., On ε-entropy for certian classes of analytic functions).

Содержание доклада опубликовано в ДАН СССР, том **117**, № 2 (1957), 191.

Урбаник К. (Вроцлав, Польша), **Обобщенные распределения в точке обобщенных случайных процессов** (Urbanik K. (Wrocław, Poland), Generalized distributions at a point of generalized stochastic processes).

Пусть $\mathfrak{X}_n$ — банаховское пространство непрерывных функций f на прямой, имеющих пределы $G_n^+(f) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{|x|^n}$ и $G_n^-(f) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{|x|^n}$ с нормой $\|f\| = \sup\limits_x \dfrac{|f(x)|}{1 + |x|^n}$. Следуя И. М. Гельфанду, обобщенным распределением называем последовательность

пар $\langle \alpha_n, L_n \rangle (n = 0, 1, \ldots)$, где $\alpha_n = \alpha_n(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ — положительная функция, L_n — неотрицательный линейный функционал в $\mathfrak{X}_n$ и $L_n(1 + |x|^n) = 1$. Обобщенные распределения $\langle \alpha_n, L_n \rangle$, $\langle \alpha_n', L_n' \rangle$ равны, если $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{\alpha_n'(\lambda)}{\alpha_n(\lambda)} = 1$ и $L_n = L_n'$.

Обозначим для краткости $D_{h_1, \ldots, h_k} F(t) = \dfrac{\Delta \lambda_{1, \ldots, \lambda_k}}{\lambda_1 \ldots \lambda_k} F(t)$, где

$$\lambda_j = h_j + \sum_{s=1}^{j-1} 2^{j-s-1} h_s.$$

Рассматриваются обобщенные случайные процессы конечного порядка, т. е. обобщенные производные непрерывных процессов.

Говорят, что обобщенный процесс Φ имеет в точке t_0 обобщенное распределение $\langle \alpha_n, L_n \rangle$, если существует целое неотрицательное число k, система положительных функций $A_{jn}(\lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, k;\ n = 0, 1, \ldots)$ и непрерывный процесс $X(\omega, t)$, такие, что $\dfrac{d^k}{dt^k} X = \Phi$, $\alpha_n(\lambda) = \prod\limits_{j=1}^{k} A_{jn}(\lambda)$ и для $f \in \mathfrak{X}_n$

$$\lim_{h_1, \ldots, h_k \to 0} \prod_{j=1}^{k} A_{jn}(h_j) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dP\,(D_{h_1, \ldots, h_k} X(\omega, t_0) < x) = L_n(f) \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Доказывается, что распределение в точке обобщенного процесса определено однозначно.

Пусть A — класс всех однородных процессов с независимыми приращениями, B — класс обобщенных производных произвольного порядка процессов из A. Очевидно, B состоит из стационарных процессов с независимыми значениями. Говорят, что $\langle \alpha_n, L_n \rangle$ — равномерное [illegible] распределение, если $L_n(f) = a_n G_n^+(f) + b_n G_n^-(f)$ $(n = 0, 1, \ldots)$; распределение пуассоновского типа, если $L_0(f) = c_0 f(\beta)$, $L_1(f) = c_1 f(\beta) + a_1 G_1^+(f) + b_1 G_1^-(f)$, $(c_1 > 0)$, $L_n(f) = a_n G_n^+(f) + b_n G_n^-(f)$ $(n \geqslant 2)$; распределение почти пуассоновского типа, если $L_0(f) = c_0 f(\beta)$, $L_n(f) = a_n G_n^+(f) + b_n G_n^-(f)$ $(n \geqslant 1)$; распределение типа Коши, если

$$L_0(f) = c_0 \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma x + \beta) \frac{dx}{1 + x^2}, \qquad L_n(f) = a_n G_n^+(f) + b_n G_n^-(f)$$

$(n \geqslant 1)$ и вырожденное распределение, если $L_n(f) = c_n f(\beta)$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Доказываются следующие теоремы:

1. $\dfrac{d^k}{dt^k} X$ $(X \in A)$ тогда и только тогда имеет распределение в точке пуассоновского типа, если $k = 1$, X — сложный пуассоновский процесс и

$$\mathbf{M}\,|X(\omega, t) - X(\omega, 0)|^n < \infty \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

2. Производные произвольного порядка процесса $X(X \in A)$ с монотонными траекториями тогда и только тогда имеют распределение в точке, если $\mathbf{M}\,|X(\omega, t) - X(\omega, 0)|^n < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$. (В этом случае получаются распределения пуассоновского или почти пуассоновского типа.)

3. Процесс $\Phi \in B$ тогда и только тогда имеет вырожденное распределение в точке, если $\Phi = \text{const}$.

4. Обобщенные распределения пуассоновского, почти пуассоновского типа, типа

Коши, равномерные и вырожденные содержат все возможные распределения в точке процессов $\frac{d}{dt} X\,(X \in A)$.

5. Обобщенные распределения почти пуассоновского типа, равномерные и вырожденные содержат все возможные распределения в точке процессов $\frac{d^k}{dt^k} X\,(X \in A, k \geqslant 2)$.

6. Если $\Phi \in B$, $\langle \alpha_n, L_n \rangle$ — распределение в точке процесса Φ и $k_0 = \left[\frac{1}{2} + \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \frac{\log \alpha_2(\lambda)}{2 \log \lambda}\right]$, то существует процесс $X_0 \in A$, удовлетворяющий равенству $\frac{d^{k_0}}{dt^{k_0}} X_0 = \Phi$. По распределению $\langle \alpha_n, L_n \rangle$ можно определить все моменты приращений $\Delta_{h_1, h_2} X_0(\omega, t)$ и в случае $k_0 = 1$ все моменты $\Delta_h X_0(\omega, t) - \mathrm{M}\Delta_h X_0(\omega, t)$. Следовательно, например, по распределению в точке производной однородного нормального процесса X (белого шума) можно определить распределение $\Delta_h X(\omega, t) - \mathrm{M}\Delta_h X(\omega, t)$.

Заседание 7 мая.

Гирсанов И. В., Сильно-феллеровские процессы и невырожденные параболические уравнения (Girsanov I. V., Strongly Feller processes and nondegenerative parabolic equations).

Содержание доклада публикуется в журнале «Теория вероятностей и ее применения».

Ососков Г. А., Предельная теорема для потоков с ограниченным последействием (Ososkov G. A., A limit theorem for flows with a restricted dependence)

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения» т. 1, вып. 2.

Заседание 14 мая.

Ширяев А. Н., Центральная предельная теорема для сложных неоднородных цепей Маркова (Širjaev A. N., A central limit theorem for multiply nonhomogeneous Markov chains).

Рассматривается сложная неоднократная цепь Маркова порядка μ, т. е. цепь, в которой, грубо говоря, условные вероятности будущих состояний зависят от μ предыдущих состояний. Доказываются две предельные теоремы для нормированной суммы случайных величин, связанных в сложную неоднородную цепь порядка μ. Доказательство этих теорем ведется при помощи метода, примененного Р. Л. Добрушиным, для доказательства аналогичных теорем для простых цепей [1].

Теорема 1. *Пусть величины* $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ *связаны при любом фиксированном* n *в сложную неоднородную цепь Маркова порядка* μ, *заданную переходными вероятностями*

$$p_1^{(n)}(\bar{\xi}, A), \quad p_2^{(n)}(\bar{\xi}, A), \ldots, p_{n-1}^{(n)}(\bar{\xi}, A),$$

где $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. *Пусть* $|x_i^{(n)}| \leqslant c_1 < \infty$ *и* $\mathrm{D}x_i^{(n)} \geqslant c_2 > 0$. *Положим*

$$\alpha_i^{(n)} = 1 - \sup_{A, \bar{\xi}, \bar{\eta}} |p_i^{(n)}(\bar{\xi}, A) - p_i^{(n)}(\bar{\eta}, A)|$$

и пусть равномерно по i

$$\alpha_i n^{\frac{1}{\mu+2}} \to \infty \tag{1}$$

при $n \to \infty$. *Тогда последовательность величин*

$$\frac{S_n - \mathrm{M}S_n}{\sqrt{\mathrm{D}S_n}} \qquad (S_n = X_1^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)})$$

асимптотически нормальна.

Заменим условие равномерной ограниченности величин $X_i^{(n)}$ условием равномерной ограниченности сверху и снизу их дисперсий. Тогда имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть дисперсии всех величин* $X_i^{(n)}$ *равномерно ограничены сверху и снизу, т. е. при некоторых* c_1 *и* c_2

$$0 < c_1 \leqslant \mathrm{D}X_i^{(n)} \leqslant c_2 < \infty.$$

Пусть также выполнено (1). *Тогда, если последовательность распределений нормированных сумм*

$$\frac{S^{(n)} - \mathbf{M}S^{(n)}}{\sqrt{\mathbf{D}S^{(n)}}}$$

сходится при $n \to \infty$ *к некоторому собственному распределению, то это распределение является безгранично делимым.*

Существенным моментом при доказательстве этих теорем является получение оценки дисперсии суммы снизу. Для сложных цепей имеет место следующая

Лемма. *Если* $0 < c \leqslant \mathbf{D}S^{(n)} < \infty$ *и* $n > \mu$, *то*

$$\mathbf{D}S_n \geqslant \frac{c_n}{16\mu} \min_{i=1,\ldots,n-1} \alpha_i^{\mu}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, Теор. вер. и ее прим., т I, вып. 1 (1956), 72.

Фортус М., Равномерная предельная теорема для распределений, притягивающихся к устойчивому закону с показателем, меньшим единицы (Fortus M., A uniform limit theorem for distributions approaching a stable law with an index less than one).

Рассматриваются суммы независимых случайных величин, распределенных по закону $F(x)$. Функция $F(x)$ принадлежит области нормального притяжения устойчивого закона $F_{\alpha,\beta}(x)$ (α и β — параметры распределения), причем $\alpha < 1$.

Введем следующее обозначение:

$$F_n(x) = \mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} < x\right\},$$

где S_n — сумма n независимых случайных величин, распределенных по закону $F(x)$. Тогда имеет место следующая

Теорема. *Если функция* $F(x)$ *обладает свойствами:*

1^a. *Существуют такие числа* $c > 0$ *и* $A > 0$, *что при* $x > A$ *функция* $F(x)$ *дифференцируема и*

$$\left|\frac{dF(x)}{dx}\right| \leqslant \frac{c}{x^{1+\alpha}}$$

или

1^b. *Существует такое число* $c > 0$ *и целое число* $A > 0$, *что при* $x > A$ *распределение* $F(x)$ *сосредоточено в точках* $x = k$ $(k = A, A+1, \ldots)$ *и*

$$p(k) \leqslant \frac{c}{k^{1+\alpha}},$$

где $k \geqslant A$, $p(k) = F(k) - F(k-1)$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - F(x))\, x^{\alpha} = M_1$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)\, |x|^{\alpha} = M_2$,

где M_1 *и* M_2 — *некоторые постоянные, не равные нулю одновременно.*

3. *Существует число* $\delta > \alpha + \alpha^2$, *такое, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\delta} \, |d(F(x) - F_{\alpha,\beta}(x))| < \infty$$

тогда справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - F_{\alpha,\beta}(x)} \to 1 \text{ при } n \to \infty \text{ равномерно по } x, \text{ если } \beta > -1$$

$$\frac{F_n(x)}{F_{\alpha,\,\delta}(x)} \to 1 \text{ при } n \to \infty \text{ равномерно по } x, \text{ если } \beta < +1.$$

Условия 1^a и 1^b теоремы выделяют два основных случая, когда верна теорема.

При доказательстве этой теоремы используются равномерные оценки для разностей $|F_n(x) - F_{\alpha,\,\beta}(x)|$.

Теорема 1. *Если разность* $F_{\alpha,\,\beta}(x) - F(x)$ *удовлетворяет условию:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\delta} |d(F(x) - F_{\alpha\beta}(x))| = \mu_{\delta} < \infty,$$

где $\alpha < \delta \leqslant 1$, *то существует такое число* $k_1 > 0$, *что выполняется неравенство:*

$$|F_n(x) - F_{\alpha\beta}(x)| \leqslant \frac{k_1}{n^{\delta/\alpha - 1}}.$$

Теорема 2. *Если разность* $F(x) - F_{\alpha\beta}(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\delta} |d(F(x) - F_{\alpha\beta}(x))| = \mu_{\delta} < \infty, \text{ где } 1 < \delta \leqslant 1 + \alpha,$$

тогда существуют такие числа A *и* $k_2 > 0$, *что*

$$\left| F_n\left(x + A \cdot \frac{n}{n^{1/\alpha}}\right) - F_{\alpha\beta}(x) \right| < \frac{k_2}{n^{\delta/\alpha - 1}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, «Предельные распределения для сумм независимых случайных величин», М.— Л., ГИТТЛ, 1949.

[2] А. В. Скороход, «Асимптотические формулы для устойчивых законов распределения, ДАН СССР, 98, № 5 (1954), 731—734.

Благовещенский Ю., Об эргодичности для схем серий (Blagoveščenskiĭ Yu., On ergodity for schemes of series).

Пусть $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{m(n)}^{(n)}$ — случайные величины, связанные в неоднородную цепь Маркова с конечным числом N состояний и $m(n)$ моментами времени ($m(n) \to \infty$ при $n \to \infty$). Так определяется неоднородная схема серий.

Пусть ${}_nP_m$ — матрица, относящаяся к n-й цепи Маркова, где ${}_nP_{ij}(m)$ (элемент матрицы ${}_nP_m$) — вероятность в m-й момент находится в E_j, если в $(m-1)$-й момент находились в E_i.

В этом случае можно показать, что «принцип эргодичности» (см. [2]) эквивалентен следующему:

$$\lim_{n \to \infty} S({}_n\overline{P}_m) = 0,$$

где ${}_n\overline{P}_m = {}_nP_{m+1} \cdot \ldots \cdot {}_nP_{m(n)}$, а $S(P) = \max\limits_{i,\,k} \sum\limits_{j=1}^{N} |P_{ij} - P_{kj}|$, если $\{P_{ij}\}_{i,\,j=1}^{N} = P$.

Последовательность матриц, определяющую однородную схему серий, будем обозначать $\{P_n\}^{\infty}$, где $P_n = \{{}_nP_{ij}\}_{i,\,j=1}^{N}$ — матрица, «управляющая» n-й цепью Маркова.

Вопрос об эргодичности однородной схемы серий решает следующая

Теорема 1. *Для того, чтобы однородная схема серий была эргодической, необходимо и достаточно, чтобы при* $n \to \infty$ $\beta(P_n)\, m(n) \to \infty$, *где* $\beta(P_n) = 1 - \gamma(P_n)$, *а*

$$\gamma(P_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } k_0 > 1 \\ \max |\lambda_i|, & \text{если } k_0 = 1, \end{cases}$$

где $P_n(\lambda) = (\lambda - 1)^{k_0} (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_\mu)^{k_\mu}$ — *характеристический многочлен матрицы* P_n.

Затем дается полное решение вопроса об эргодичности однородной схемы серий для 3-х состояний в условиях на элементы матриц.

Для случая неоднородной схемы серий обобщена теорема 11, доказанная в работе [1], в следующей теореме:

Для того, чтобы неоднородная схема серий была эргодической, достаточно, а в случае $N = 2$ и необходимо, чтобы $\sum_{k=1}^{m(n)} \alpha({}_nP_k) \to \infty$ при $n \to \infty$, где $\alpha(P) = \min_{i,\,k} \sum_{j=1}^{N} \min(P_{ij}, P_{kj})$, если $\{P_{ij}\}_{i,\,j=1}^{N} = P$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, Теория вероятн. и ее прим., I, вып. 1 (1956), 72—88.

[2] А. Н. Колмогоров, Об аналитических методах в теории вероятностей, УМН, 5 (138), 5—42.

СОДЕРЖАНИЕ ВТОРОГО ТОМА

Выпуск первый

Doob I. L. Brownian motion on a Green space 3
Дуб Дж. Л. Броуновское движение в пространстве Грина 32
Линник Ю. В. О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона 34
Linnik Yu. V. On factorizing the composition of a Gaussian and a Poissonian law. 59
Цзян Цзэ-пей. О линейной экстраполяции непрерывного однородного случайного поля. 60
Chiang Tse-pei. Extrapolation theory of a homogeneous random field with continuous parameters. 91
Takács L. On a stochastic process concerning some waiting time problems . . . 92
Такач Л. О стохастическом процессе, связанном с некоторыми задачами о времени ожидания. 105

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Севастьянов Б. А. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами 106
Sevastjanov B. A. An ergodic theorem for Markov processes and its application to telephone systems with refusals 116
Коронкевич А. И. Некоторые замечания об оценке точности линейного экстраполирования и фильтрации 116
Koronkevič A. I. Some remarks on evaluating the accuracy of linear extrapolation and filtration. 121
Ибрагимов И. А. Замечание о вероятностных распределениях класса L . . . 121
Ibragimov I. A. Remark on a probability distribution of class L 124
Большев Л. Н. Номограмма, связывающая параметры нормального распределения с вероятностями при классификации по трем группам 124
Bolshev L. N. A nomogram connecting the parameters of a normal distribution with the probabilities for classification into three groups 126
Синай Я. Г. О распределении первой положительной суммы для последовательности независимых случайных величин. 126
Sinay Ya. G. On the distribution of the first positive sum for the sequence of independent random variables. 135
Резюме докладов, сделанных на заседаниях научно-исследовательского семинара по теории вероятностей (сентябрь — декабрь 1956 г.) 135
A summary of papers presented at the sessions of the scientific research seminar on the theory of probabilities 136

Выпуск второй

Скороход А. В. Предельные теоремы для случайных процессов с независимыми приращениями. 145
Skorohod A. V. Limit theorems for stochastic processes with independent increments. 177
Saad K. Nasr. On the convergence, basic distributions and classification of abstract random variables. 178
Саад К. Наср. О сходимости, совместных распределениях и классификации абстрактных случайных величин 186

Юшкевич А. А. О строго марковских процессах 187
Yushkevič A. A. On strong Markov processes 212
Рихтер В. Локальные предельные теоремы для больших уклонений 214
Richter W. Lokale Grenzwertsätze für große Abweichungen 229
Волконский В. А. Многомерная предельная теорема для однородных цепей Маркова со счетным множеством состояний 239
Volkonsky V. A. A multidimensional limit theorem for Markov chains with a countable set of states 255

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Золотарев В. М. Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов 256
Zolotarev V. M. More exact statements of several theorems in the theory of branching processes 266
Климов В. Н. Кинетическое уравнение для примесей 266
Klimov V. N The kinetic equation for mixtures 274
Розанов Ю. А. О локальной предельной теореме для решетчатых распределений 275
Rozanov Yu. A. On a local limit theorem for lattice distributions 281
Ченцов Н. Н. Многопараметрическое броуновское движение Леви и обобщенный белый шум 281
Čentsov N. N. Le mouvement brownien à plusieurs paramètres de M. Lévy et le bruit blanc généralisé 282
Zbyněk Šidák. On relations between strict sense and wide sense conditional expectations 283
Збынек Шидак. Об отношениях между условными математическими ожиданиями в узком смысле и в широком смысле 288

Выпуск третий

К новым успехам Советской школы теории вероятностей 289
Яглом А. М. Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам 292
Yaglom A. M. Certain types of random fields in n-dimensional space similar to stationary stochastic processes 337
Севастьянов Б. А. Предельные теоремы для ветвящихся случайных процессов специального вида 339
Sevastyanov B. A. Limit theorems for branching stochastic processes of special form 348
Линник Ю. В. Некоторые замечания к методу наименьших квадратов, с приложением к задачам прямых и обратных засечек 349
Linnik Yu. V. Some remarks on least squares in connection with direct and inverse location problems 359
Чистяков В. П. Локальные предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов 360
Čistyakov V. P. Local limit theorems for branching processes 374

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Рубинштейн Г. Ш. и Урбаник К. Решение одной экстремальной задачи . . . 375
Rubinstein G. Š. and *Urbanik K.* Solution of an extremal problem 377
Добрушин Р. Л. Некоторые классы однородных счетных марковских процессов 377
Dobrushin R. L. Some classes of homogeneous denumerable Markov processes 380
Гихман И. И. Об одном непараметрическом критерии однородности k выборок 380
Gichman I. I. Über ein nichtparametrisches Kriterium der Homogenität der k-Stichproben 384
Черкасов И. Д. О преобразовании диффузионного процесса в винеровский . . 384
Čerkasov I. D. On transforming the diffusion process to a Wiener process . . 388

Выпуск четвертый

Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова 389
Nagaev S. V. Some limit theorems for stationary Markov chains 416
Скороход А. В. О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам. 1. Процессы с независимыми приращениями 417
Skorohod A. V. On the differentiability of measures which correspond to stochastic processes. 443
Золотарев В. М. Преобразования Меллина — Стильтьеса в теории вероятностей. 444
Zolotarev V. M. Mellin-Stieltjes transformations in probability theory . . 469

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Смирнов С. В., Потапов М. К. Номограмма для неполной Г-функции вероятности χ^2 470
Smirnov S. V., Potapov M. K. A nomogram for an incomplete Γ-function and probability function χ^2 472
Клепиков Н. П., Соколов С. Н. Нелинейный конфлюентный анализ 473
Klepikov N. P., Sokolov S. N. Non-linear confluence analysis 475
Прохоров Ю. В., Фиш М. Характеристическое свойство нормального распределения в Гильбертовом пространстве. 475
Prohorov Yu. V., Fish M. A. Characterization of normal distributions in Hilbert space. 477
Резюме докладов, сделанных на заседаниях научно-исследовательского семинара по теории вероятностей. (Москва, февраль — май 1957 г.) 478
A summary of papers presented at the sessions of the scientific research seminar on the theory of probabilities 478

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и в технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках, или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора. Редакция просит в оформлении цитируемой литературы придерживаться порядка, принятого в журнале.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, или Киев, площадь Калинина, 6, Институт математики АН УССР.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal „The Theory of Probability and Its Applications" accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces. References to books and articles cited should conform to the standard adopted by the publishers.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics; or to Kiev, Kalinin Square, 6, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR.

Подписано к печати 29/I 1958 г. Формат бумаги 70×108$^1/_{16}$. Бум. л. 3$^1/_4$ Печ. л. 8,9
Уч. изд. 8,7 Тираж 2050 экз. Зак. 2308. Т-00033

2-я типография Издательства АН СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10

Цена ~~1 р. 25 к.~~ 2-25

+75